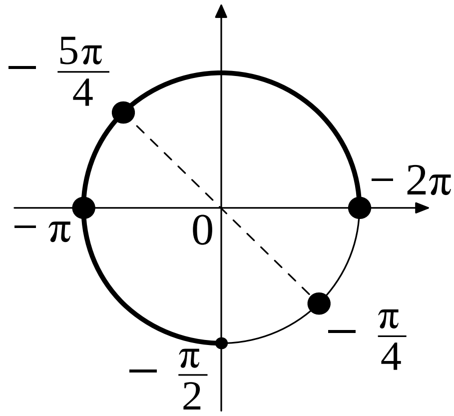
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.



Решение

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x(\cos x + \sin x) = 0.$$

Получаем, что $\sin x = 0$ или $\sin x = -\cos x$.

Из второго уравнения получаем $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, поскольку $\cos x \neq 0$. Следовательно,

$x = \pi n$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью.

Получаем $x = -2\pi$, $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = -\pi$.

Ответ: а) πn, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) -2π, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\pi$.

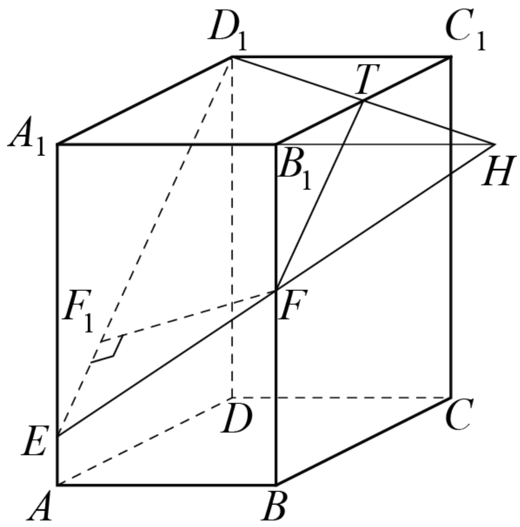
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6 \cdot 14}{7 \cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6.$

Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны, ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H.

Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT – средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$ED_1 = EA_1 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$, $FT = FB_1 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, $EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}$.

Высота FF_1 трапеции равна $\sqrt{\left(2\sqrt{17}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}$.

Площадь равна $5\sqrt{2} \cdot \dfrac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} = 90$.

Ответ: б) 90.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17

Решите неравенство $\dfrac{81^x + 2\cdot 25^{x\log_5 3} - 5}{(4x-1)^2} \ge 0$.

Решение

Точка $x = \dfrac{1}{4}$ не является решением неравенства. При $x \ne \dfrac{1}{4}$ получаем

$$81^x + 2\cdot 9^x - 5 \ge 0.$$

Замена $y = 9^x$ даёт $y^2 + 2y - 5 \ge 0$, откуда $y \le -1-\sqrt{6}$ или $y \ge \sqrt{6}-1$. Неравенство $9^x \le -1-\sqrt{6}$ не имеет решений, а из неравенства $9^x \ge \sqrt{6}-1$ получаем $x \ge \log_9\left(\sqrt{6}-1\right)$.

Сравним $\log_9\left(\sqrt{6}-1\right)$ и $\dfrac{1}{4}$:

$$\sqrt{6}-1 < 2{,}5-1 = 1{,}5 < \sqrt{3} = 9^{\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, $\log_9(\sqrt{6}-1) < \dfrac{1}{4}$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка: $\log_9\left(\sqrt{6}-1\right) \le x < \dfrac{1}{4}$ и $x > \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\left[\log_9\left(\sqrt{6}-1\right); \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

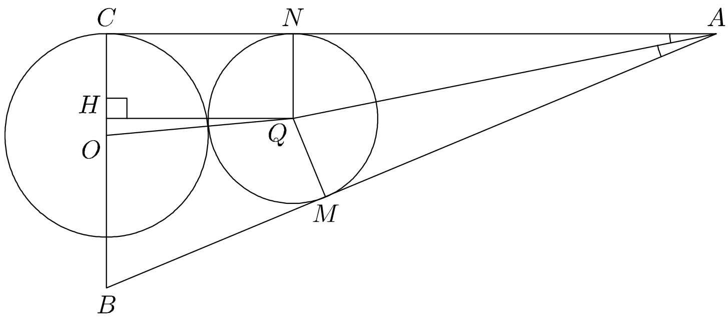
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC=15$, $BC=8$. Окружность радиуса $2{,}5$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=17,$$

следовательно,

$$\cos A=\frac{15}{17},\quad \sin A=\frac{8}{17}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\angle NAQ=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1}{4}.$$

Поэтому $AC>AN=4NQ$, что требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ;

$$QH=CN=15-4x>0,\quad OQ=x+2{,}5;\quad OH=\left|OC-CH\right|=\left|2{,}5-x\right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2+QH^2=OQ^2$, откуда

$$(15-4x)^2+(2{,}5-x)^2=(2{,}5+x)^2;\quad 16x^2-130x+225=0.$$

Решая это уравнение, находим $x=2{,}5$ или $x=5{,}625$. Условию $15-4x>0$ удовлетворяет только $x=2{,}5$. Кстати, отсюда следует, что точки O и H совпадают.

Ответ: 2,5.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение

Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна

$$(2k+5)\cdot(1{,}1)^{30-k}.$$

Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(2k+5)\cdot(1{,}1)^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1{,}1)^{30-k}\left(2k+5-1{,}1\cdot\left(2(k-1)+5\right)\right)=(1{,}1)^{30-k}(1{,}7-0{,}2k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 8$ и $b_k<0$ при $k>8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=8$.

Ответ: в течение восьмого года.

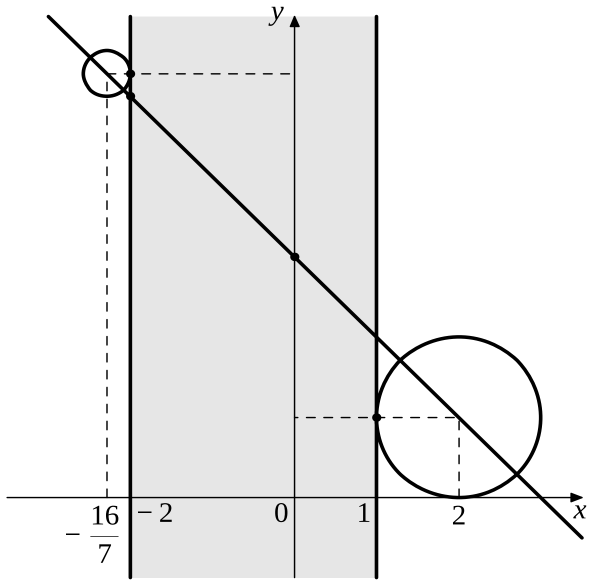
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-1)(x+2)\le 0,\\ 8x^2+8y^2-16a(x-y)+15a^2-48y-50a+72=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение



Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$8x^2-16ax+8a^2+8y^2+16ay+8a^2-a^2-48y-50a+72=0;$$

$$8(x-a)^2+8(y+a)^2-48(y+a)+72-a^2-2a=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$8(x-a)^2+8(y-3+a)^2-a^2-2a=0;\ (x-a)^2+(y-3+a)^2=\frac{a(a+2)}{8}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a;3-a)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{a^2+2a}{8}}$.

Неравенство $(x-1)(x+2)\le 0$ определяет вертикальную полосу $-2\le x\le 1$.

На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases}a<-2,\\ (a+2)^2=\dfrac{a^2+2a}{8}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}a>1,\\ (a-1)^2=\dfrac{a^2+2a}{8},\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a < -2, \\ a + 2 = \dfrac{a}{8} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > 1, \\ 7a^2 - 18a + 8 = 0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $a = -\dfrac{16}{7}$. Вторая система имеет решение $a = 2$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -2 \le a \le 1, \\ a^2 + 2a = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a = 0 \text{ или } a = -2.$$

Ответ: $-\dfrac{16}{7}$; -2; 0; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но в ответ включены также и одно-два неверных значения.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности трёх квадратных уравнений относительно a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Решение

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом

$$\begin{cases} 50 < k < l, \\ k + l \le 119. \end{cases}$$

а) Например, 54 и 63 солдата. Вместе 117, их можно построить в колонну по 9 человек в ряду так, что 6 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 7 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 11. Тогда, учитывая, что $50 < k < 60$, получаем, что $k = 55$. Наименьшее возможное значение l равно $55 + 11 = 66$, но вместе получается 121 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \ge 8$; $k - l \le -8$, что вместе с условием $k + l \le 119$ приводит к неравенство $2k \le 111$, то есть $k \le 55$. При этом

$$k + d \le l \le 119 - k,$$

где d — наименьший общий делитель, превосходящий 7.

Если $k = 51 = 3 \cdot 17$, то $d = 17$, $l = 68$, а в роте 119 солдат.

Если $k = 52 = 4 \cdot 13$, то $65 \le l \le 67$. Тогда $l = 65$, общий делитель 13 и $k + l = 117$.

Если $k = 53$, то $53 + 53 = 106 \le l \le 66$. Противоречие.

Если $k = 54 = 6 \cdot 9$, то $54 + 9 = 63 \le l \le 65$. Тогда $l = 63$, общий делитель равен 9, и в роте 117 солдат.

Если $k = 55 = 5 \cdot 11$, то $66 \le l \le 64$, но числа 63 и 64 взаимно просты с 55. Противоречие.

Ответ: а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119.

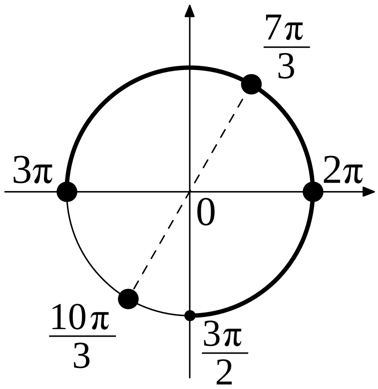
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ во всех пунктах.	4
Верно выполнены пункты *а* и *в* или *б* и *в*.	3
Верно выполнены пункты *а* и *б* или только пункт *в*.	2
Верно выполнен один из пунктов *а* и *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15 а) Решите уравнение $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

Решение



а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0.$$

Получаем, что $\sin x=0$ или $\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

Из второго уравнения находим $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$, поскольку $\cos x\neq 0$.

Следовательно,

$$x=\pi n \text{ или } x=\frac{\pi}{3}+\pi n\text{, где } n\in\mathbb{Z}.$$

Все найденные значения удовлетворяют условию $\cos x\neq 0$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью. Получаем $x=2\pi$, $x=\frac{7\pi}{3}$, $x=3\pi$.

Ответ: а) πn, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π, $\frac{7\pi}{3}$, 3π.

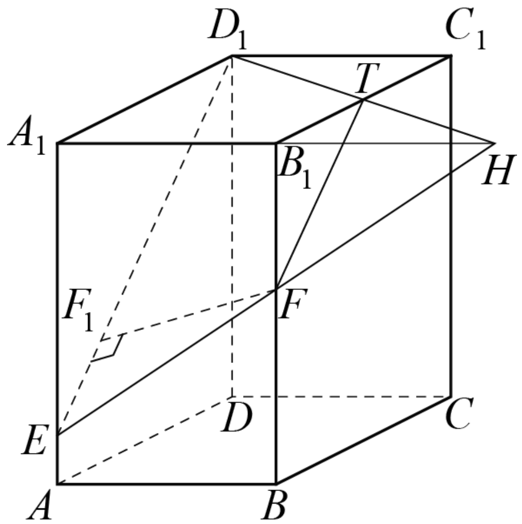
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1 и делит BB_1 на две части. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{4A_1A}{5AD} = \frac{4\cdot 20}{5\cdot 16} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{B_1C_1}{2} = 8$.

Тогда $FB = 20 - 8 = 12$ и $BF : FB_1 = 3:2$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны, ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}\,,\ FT = FB_1 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}\,,$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{82}\,.$$

Проведём в трапеции высоту FF_1. Имеем

$$EF_1 = \frac{ED_1 - FT}{2} = 4\sqrt{2}\,,\ \ FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{82 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}\,.$$

Площадь трапеции равна $5\sqrt{2} \cdot \dfrac{16\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 120$.

Ответ: б) 120.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17

Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 7^x - 4^{x\log_2 7} - 11}{(2x-1)^2} \ge 0$.

Решение

Точка $x = \dfrac{1}{2}$ не является решением неравенства. При $x \ne \dfrac{1}{2}$ получаем

$$8\cdot 7^x - 49^x - 11 \ge 0.$$

Замена $y = 7^x$ даёт $y^2 - 8y + 11 \le 0$, откуда $4-\sqrt{5} \le y \le 4+\sqrt{5}$.

Получаем $4-\sqrt{5} \le 7^x \le 4+\sqrt{5}$, откуда $\log_7\left(4-\sqrt{5}\right) \le x \le \log_7\left(4+\sqrt{5}\right)$.

Нужно сравнить границы полученного отрезка с $\dfrac{1}{2}$. Имеем

$$4-\sqrt{5} < 2 < \sqrt{7}, \quad 4+\sqrt{5} > 6 > \sqrt{7}.$$

Следовательно, $\log_7\left(4-\sqrt{5}\right) < \dfrac{1}{2} < \log_7\left(4+\sqrt{5}\right)$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка

$$\log_7\left(4-\sqrt{5}\right) \le x < \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} < x \le \log_7\left(4+\sqrt{5}\right).$$

Ответ: $\left[\log_7\left(4-\sqrt{5}\right); \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}; \log_7\left(4+\sqrt{5}\right)\right]$.

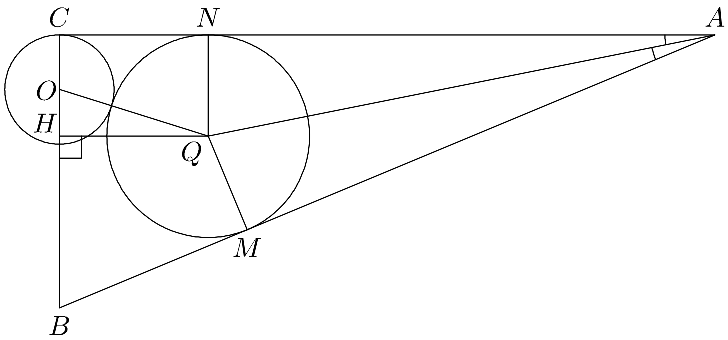
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC=12$, $BC=5$. Окружность радиуса $0{,}5$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\dfrac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC.

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13,$$

следовательно,

$$\cos A=\frac{12}{13},\quad \sin A=\frac{5}{13}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\angle NAQ=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1}{5}.$$

Поэтому $AC>AN=5NQ$, что требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ:

$$QH=CN=12-5x>0,\quad OQ=x+0{,}5,$$
$$OH=\left|OC-CH\right|=\left|0{,}5-x\right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2+QH^2=OQ^2$, откуда

$$(12-5x)^2+(0{,}5-x)^2=(0{,}5+x)^2;\quad 25x^2-122x+144=0.$$

Решая это уравнение, находим $x=2$ или $x=2{,}88$. Условию $12-5x>0$ удовлетворяет только $x=2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс.рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение

Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через двадцать пять лет после покупки сумма на его счёте будет равна

$$(k+7)\cdot 1{,}08^{25-k}.$$

Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k = (k+7)\cdot 1{,}08^{25-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 25. Рассмотрим приращение

$$b_k = a_k - a_{k-1} = 1{,}08^{25-k}\cdot\Big(k+7-1{,}08\cdot\big((k-1)+7\big)\Big) = 1{,}08^{25-k}(0{,}52-0{,}08k).$$

Отсюда $b_k > 0$ при $k \le 6$ и $b_k < 0$ при $k > 6$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k = 6$.

Ответ: в течение шестого года.

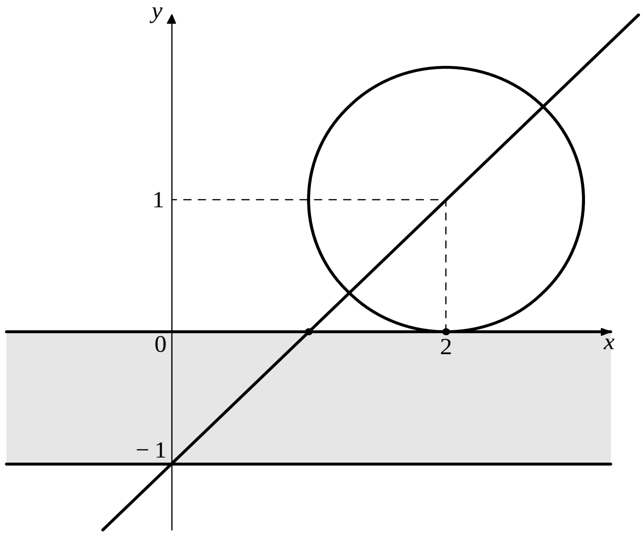
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1)\le 0, \\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение



Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$3x^2-6ax+3a^2+3y^2-6ay+3a^2-6x+4a+3-a^2=0;$$

$$3(x-a)^2+3(y-a)^2-6(x-a)+3-2a-a^2=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$3(x-a)^2-6(x-a)+3+3(y-a)^2=a^2+2a;$$

$$(x-a-1)^2+(y-a)^2=\frac{a^2+2a}{3}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a+1;a)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{a^2+2a}{3}}$.

Неравенство $y(y+1)\le 0$ определяет горизонтальную полосу $-1\le y\le 0$. На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a<-1, \\ (a+1)^2=\dfrac{a^2+2a}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ a^2=\dfrac{a^2+2a}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-1, \\ 2a^2+4a+3=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ 2a^2-2a=0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решение $a=1$.
2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -1 \le a \le 0, \\ a^2 + 2a = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a=0.$$

Ответ: 0; 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но в ответ включены также и одно-два неверных значения.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности трёх квадратных уравнений относительно a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Решение

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом

$$\begin{cases} 47 \le k < l, \\ k + l \le 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдат. Вместе 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 13. Тогда, учитывая, что $47 \le k < 55$, получаем, что $k = 52$. Наименьшее возможное значение l равно $52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \ge 9$; $k - l \le -9$, что вместе с условием $k + l \le 110$ приводит к неравенству $2k \le 101$, то есть $k \le 50$. При этом

$$k + d \le l \le 110 - k,$$

где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

Если $k = 47$, то $d = 47$, $47 + 47 = 94 \le l \le 110 - 47 = 63$. Противоречие.

Если $k = 48$, то $d = 12$, $l = 60$, а в роте 108 солдат.

Если $k = 49$, то $98 \le l \le 110 - 49 = 61$. Противоречие.

Если $k = 50$, то $d = 10$, $l = 60$, а в роте 110 солдат.

Ответ: а) Например, 50 и 60; б) нет; в) 108 или 110.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ во всех пунктах.	4
Верно выполнены пункты *а* и *в* или *б* и *в*.	3
Верно выполнены пункты *а* и *б* или только пункт *в*.	2
Верно выполнен один из пунктов *а* и *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4