Вариант № 2917723

1. B 2 № 314867. В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Расход воды составил $114 - 103 = 11$ куб. м. Поэтому Алексей должен заплатить $11 \cdot 19{,}2 = 211{,}2$ руб.

Ответ: 211,2.

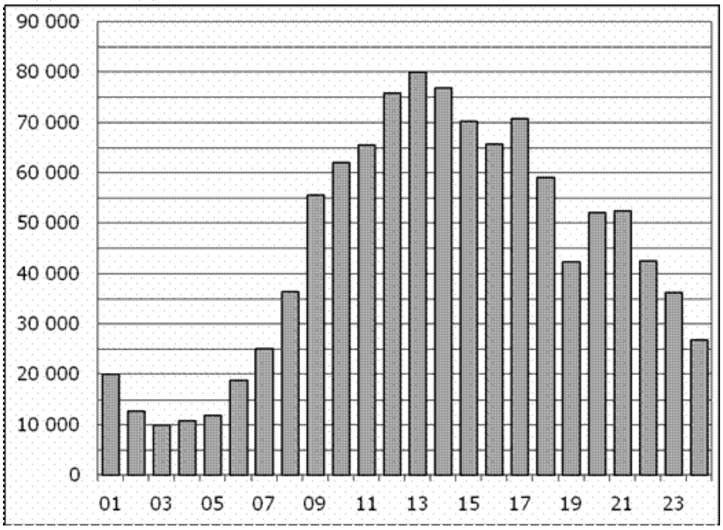
2. B 2 № 77347. В школе 800 учеников, из них 30% — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

Решение.

Учеников начальной школы $800 \cdot 0{,}3 = 240$, а учеников средней и старшей школы — $800 - 240 = 560$. Значит, немецкий язык в школе изучают $560 \cdot 0{,}2 = 112$ учеников.

Ответ: 112.

3. B 3 № 28759. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каж дого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме разность наибольшего и наименьшего количества посетителей за час в данный день.



Решение.

Из диаграммы видно, что наибольшее и наименьшее количество посетителей составили 80 000 и 10 000 соответственно (см. рисунок). Их разность: 70 000 человек.

Ответ: 70 000.

4. B 4 № 77361. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Тверь	Липецк	Барнаул
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Решение.

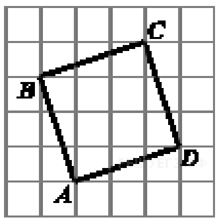
В Твери стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $11 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 260 + 1 \cdot 38 = 477$ руб.

В Липецке стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 280 + 1 \cdot 44 = 527$ руб.

В Барнауле стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $14 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 300 + 1 \cdot 50 = 576$ руб.

Самый дешёвый набор продуктов можно купить в Твери по цене 477 руб.

5. B 5 № 27849. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{10}$.



Решение.

по теореме Пифагора найдем сторону четырехугольника:

$$AB = \sqrt{10} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2} = 10,$$

тогда периметр равен $4AB = 40$.

Ответ: 40.

6. B 6 № 319353. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение.

Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: 0,45 · 0,03 = 0,0135.

Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: 0,55 · 0,01 = 0,0055.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна 0,0135 + 0,0055 = 0,019.

Ответ: 0,019.

7. B 7 № 11149.

Найдите корень уравнения: $x=\dfrac{-8x+15}{x-10}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение.

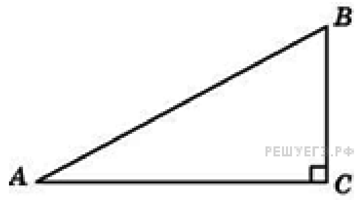
Область допустимых значений: $x\neq 10$. На этой области домножим на знаменатель:

$$x=\frac{-8x+15}{x-10}\Leftrightarrow x(x-10)=-8x+15\Leftrightarrow x^2-2x-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Оба корня лежат в ОДЗ. Меньший из них равен –3.

Ответ: –3.

8. B 8 № 27782. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC=2\sqrt{3}$. Найдите AB.



Решение.

$$AB=\frac{AC}{\cos A}=\frac{2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ}=2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4.$$

Ответ: 4.

9. B 9 № 122715.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+5t+13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t=3$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

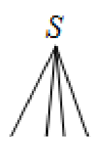
$$v(t)=x'(t)=-t^2+4t+5.$$

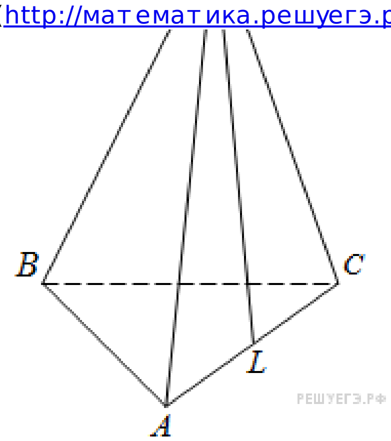
Тогда находим:

$$v(3)=-9+4\cdot 3+5=8 \text{ м/с}.$$

Ответ: 8.

10. B 10 № 921. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра AC, S — вершина. Известно, что $BC=6$, а $SL=5$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.





Решение.

Отрезок SL является медианой правильного треугольника SAC, а значит, и его высотой. Боковые грани пирамиды равны, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAC} = 3\cdot\frac{1}{2}AC\cdot SL = \frac{3}{2}BC\cdot SL = \frac{3}{2}\cdot 6\cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

11. B 11 № 26816. Найдите значение выражения $(4a)^3 : a^7\cdot a^4$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(4a)^3 : a^7\cdot a^4 = \frac{64a^3\cdot a^4}{a^7} = \frac{64a^7}{a^7} = 64.$$

Ответ: 64.

12. B 12 № 27961. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ – постоянные параметры, $x(\text{м})$ – смещение камня по горизонтали, $y(\text{м})$ – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение.

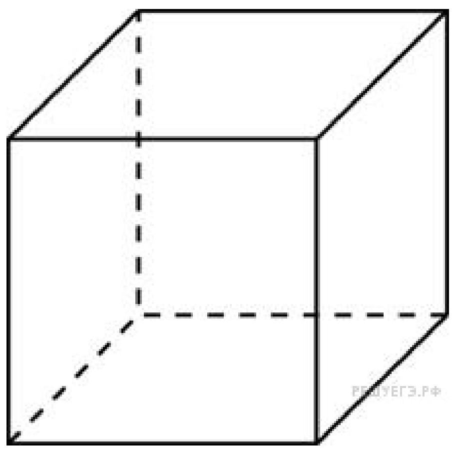
Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$: при заданных значениях параметров a и b:

$$y \geq 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 90\text{м}.$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние – 90 метров.

Ответ: 90.

13. B 10 № 27130. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?



14. B 14 № 99577. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1 кг, а масса 60-процентного – m_2. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1+0,6m_2=0,36(m_1+m_2+10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1+0,6m_2+0,5\cdot 10=0,41(m_1+m_2+10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}0,3m_1+0,6m_2=0,36m_1+0,36m_2+3,6,\\ 0,3m_1+0,6m_2+5=0,41m_1+0,41m_2+4,1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,24m_2-0,06m_1=3,6,\\ 0,11m_1-0,19m_2=0,9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4m_2-m_1=60,\\ 11m_1-19m_2=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_1=4m_2-60,\\ 11(4m_2-60)-19m_2=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_1=4m_2-60,\\ 25m_2=750\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_1=60,\\ m_2=30.\end{cases}$$

Ответ: 60.

15. B 15 № 77468. Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение.

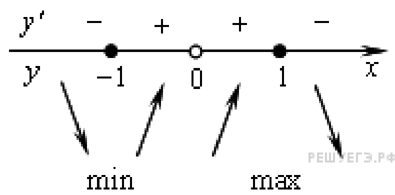
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=-\left(x+\frac{1}{x}\right)'=-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-1+\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-1$.

Ответ: −1.

16. C 1 № 485965. а) Решите уравнение $\cos x=\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)^2-1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-1\Leftrightarrow\cos x=1-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos x=-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\Leftrightarrow\cos x=-\sin x\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\,k\in\mathbb{Z}.$$

б) Найдем корни, лежащие на заданном отрезке. Составим двойное неравенство:

$$\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+\pi k\le 2\pi,$$

откуда

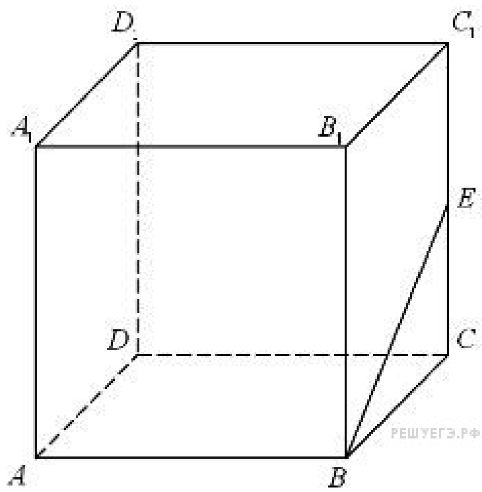
$$\frac{3}{4}\le k\le 2\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $k=1$ или $k=2$, тогда искомые корни $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

17. C 2 № 500112. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD.

Решение.



Примем ребро куба за единицу. Тогда $CE=\frac{1}{2}$.

Прямая AD параллельна прямой BC, значит, искомый угол равен углу CBE.

Из прямоугольного треугольника CBE с прямым углом C имеем:

$$\operatorname{tg}\angle CBE=\frac{CE}{BC}=\frac{1}{2},$$

тогда

$$\angle CBE=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Ответ также может быть представлен в следующем виде: $\angle CBE=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$ или $\angle CBE=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

18. C 3 № 503254. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{5x-12}+\dfrac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x,\\ \log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\dfrac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\le-2.\end{cases}$$

Решение.
1. Решим первое неравенство системы:

$$\frac{1}{5x-12}+\frac{2x^2-6x+1}{x-3}\geq 2x \Leftrightarrow \frac{1}{5x-12}+\frac{2x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}\geq 2x \Leftrightarrow \frac{2x-5}{(5x-12)(x-3)}\geq 0.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $\frac{12}{5}<x\leq\frac{5}{2};\ x>3.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\leq -2 \Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{(2x+7)(x+1)}{(x+1)^4}\leq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7)\cdot(\log_{x+1}(2x+7)-3)\leq -2.$$

Пусть $t=\log_{x+1}(2x+7)$, тогда неравенство примет вид: $t(t-3)\leq -2;\ t^2-3t+2\leq 0$, откуда

$$1\leq t\leq 2;\ 1\leq\log_{x+1}(2x+7)\leq 2.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<x+1<1$.

$$\log_{x+1}(2x+7)\geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+7\leq x+1,\\ 2x+7>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq -6,\\ x>-\frac{7}{2};\end{cases} \text{нет решений.}$$

В этом случае второе неравенство исходной системы не имеет решений.
Второй случай: $x+1>1$.

$$\begin{cases}\log_{x+1}(2x+7)\geq 1,\\ \log_{x+1}(2x+7)\leq 2,\\ x+1>1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+7\geq x+1,\\ 2x+7\leq(x+1)^2,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -6,\\ x^2-6\geq 0,\\ x>0,\end{cases} \text{откуда } x\geq\sqrt{6}.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\geq\sqrt{6}$.

3. Поскольку $\frac{12}{5}<\sqrt{6}<\frac{5}{2}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\sqrt{6}\leq x\leq\frac{5}{2};\ x>3.$

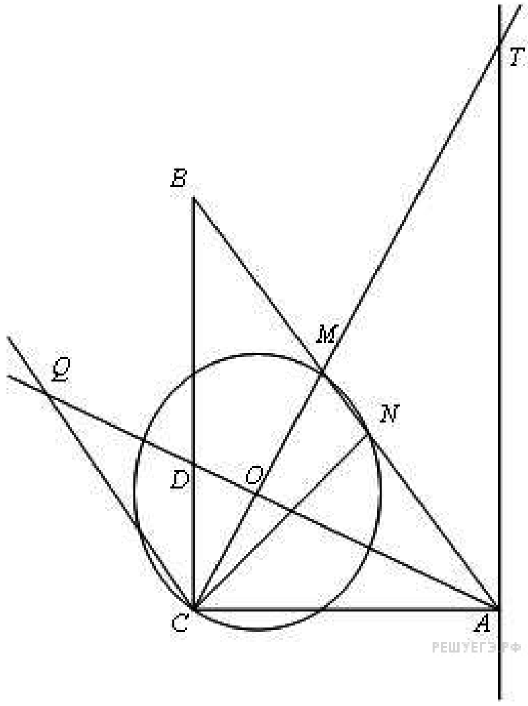
Ответ: $\left[\sqrt{6};\ \frac{5}{2}\right];\ (3;\ +\infty)$

19. C 4 № 485990. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=15$, $AC=9$ и $BC=12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD— точка O, причем $CD=4$ и $AO=3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.

Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\frac{AO}{OD}=3$, поэтому $AT=3CD=12$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина стороны AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла равна половине гипотенузы, значит $CM=\frac{1}{2}AB=7{,}5$.

Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q— точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\frac{CD}{DB}=\frac{1}{2}$, поэтому $CQ=\frac{1}{2}AB=7{,}5=AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.



Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM=OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM=\frac{1}{2}AB=7{,}5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN\perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

Отсюда $CN=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{9\cdot 12}{15}=\frac{36}{5}=7{,}2.$

Ответ: 7,5 или 7,2.

20. C 5 № 485946. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-10x+21|$ больше, чем -42.

Решение.

1. Функция имеет вид:

а) при $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)\geq 0$

$$f(x)=4ax+(x^2-10x+21)=x^2+2(2a-5)x+21,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x=5-2a$;

б) при $(x-3)(x-7)\leq 0 \Leftrightarrow 3\leq x\leq 7$

$$f(x)=4ax-(x^2-10x+21)=-x^2+2(2a+3)x-21,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если $5-2a$ принадлежит отрезку $[3;7]$ то наименьшее значение функция может принимать только в точках $x=3$ и $x=7$ Если $5-2a\notin[3;7]$ — то еще и в точке $x=5-2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -42 тогда и только тогда, когда либо

$$\begin{cases} 5-2a\in[3;7], \\ f(3)>-42, \\ f(7)>-42, \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} 5-2a\notin[3;7], \\ f(3)>-42, \\ f(7)>-42, \\ f(5-2a)>-42. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1\leq a\leq 1, \\ 12a>-42, \quad ,-1\leq a\leq 1 \\ 28a>-42; \end{cases}$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a\in(-1,5;-1)\cup(1;+\infty), \\ |2a-5|<3\sqrt{7}; \end{cases}$$

$\dfrac{5-3\sqrt{7}}{2}<a<-1$ или $1<a<\dfrac{5+3\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{5-3\sqrt{7}}{2}<a<\dfrac{5+3\sqrt{7}}{2}$.

21. C 6 № 500371. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков МОГЛО быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+9}=\frac{4}{13}$, что больше $\frac{3}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+9}=\frac{8}{17}>\frac{3}{7}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Нулем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию

$$\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{3}{11},\ \frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{3}{7},$$

значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{3}{8}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{3}{4}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{9}{8}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{9}{8}+1}=\frac{8}{17}.$$

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{8}{17}$.

Ответ: а) да: б) 10; в) $\frac{8}{17}$.