Вариант № 2917714

1. B 2 № 77333. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 80 копеек. Счетчик электроэнергии 1 ноября показывал 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря показывал 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

Решение.

Расход электроэнергии за ноябрь составляет 12 802 − 12 625 = 177 киловатт-часов. Значит, за ноябрь нужно заплатить 1,8 · 177 = 318,6 рубля.

Ответ: 318,6.

2. B 2 № 77340. В школе 124 ученика изучают французский язык, что составляет 25% от числа всех учеников. Сколько учеников учится в школе?

Решение.

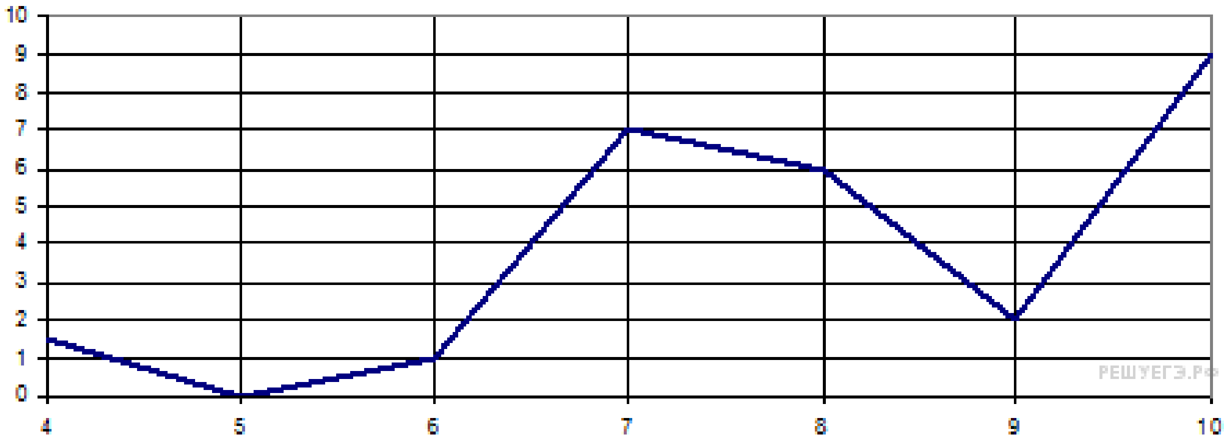
Разделим 124 на 0,25:

$$\frac{124}{0,25} = \frac{124 \cdot 100}{25} = 124 \cdot 4 = 496.$$

Значит, в школе учится 496 учеников.

Ответ: 496.

3. B 3 № 27529. На рисунке изображен график осадков в г. Калининграде с 4 по 10 февраля 1974 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 2 до 8 мм осадков.



Решение.

Из графика видно, что от 2 до 8 мм осадков выпадало три дня: 7, 8 и 9 февраля (см. рисунок). Подробнее: 04.02 выпало 1,5 мм осадков, 05.02 — 0 мм, 06.02 — 1 мм, 07.02 — 7 мм, 08.02 — 6мм, 09.02 — 2 мм, 10.02 — 9 мм.

Ответ: 3.

4. B 4 № 26676. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 500 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Автомобиль	**Топливо**	**Расход топлива (л на 100 км)**	**Арендная плата (руб. за 1 сутки)**
А	Дизельное	7	3700
Б	Бензин	10	3200
В	Газ	14	3200

Цена дизельного топлива — 19 рублей за литр, бензина — 22 рублей за литр, газа — 14 рублей за литр.

Решение.

Рассмотрим все варианты.

На 500 км автомобилю *А* понадобится $7 \cdot 5 = 35$ л дизельного топлива. Стоимость его аренды в сутки складывается из арендной платы 3700 руб. и затрат на дизельное топливо $35 \cdot 19 = 665$ руб. Всего 4365 руб.

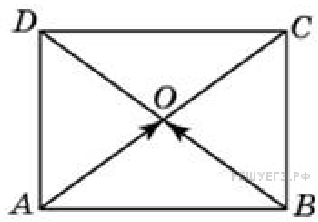
На 500 км автомобилю *Б* понадобится $10 \cdot 5 = 50$ л бензина. Стоимость его аренды в сутки складывается из арендной платы 3200 руб. и затрат на бензин $50 \cdot 22 = 1100$ руб. Всего 4300 руб.

На 500 км автомобилю *В* понадобится $14 \cdot 5 = 70$ л газа. Стоимость его аренды в сутки складывается из арендной платы 3200 руб. и затрат на газ $70 \cdot 14 = 980$ руб. Всего 4180 руб.

Стоимость самого дешевого заказа составляет 4180 рублей.

Ответ: 4180.

5. B 5 № 27711. Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.



Решение.

Сумма векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$ равна вектору $\vec{AD}$. Его длина равна 6.

Ответ: 6.

6. B 6 № 320202. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение.

Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна $1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$.

Ответ: 0,02.

7. B 7 № 26648. Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = \log_5 3$.

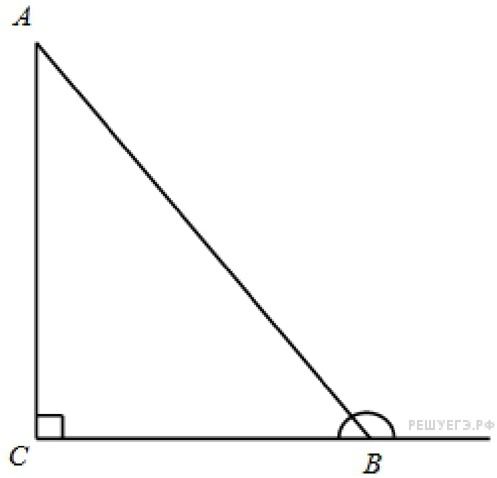
Решение.

Последовательно получаем:

$$\log_5(5-x)=\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x=3 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

8. B 8 № 27375. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg}A=\frac{7}{24}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B.



Решение.

так как

$$\sin A=\frac{CB}{AB}=\cos B,$$

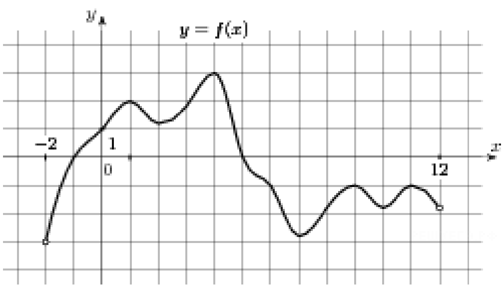
имеем

$$\cos B_{\text{внеш}}=-\cos B=-\sin A=-\sqrt{1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A}}=$$

$$=-\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{49}{576}}}=-\sqrt{1-\frac{576}{625}}=-\sqrt{\frac{49}{625}}=-0,28.$$

Ответ: –0,28.

9. B 9 № 27490. На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (–2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*.

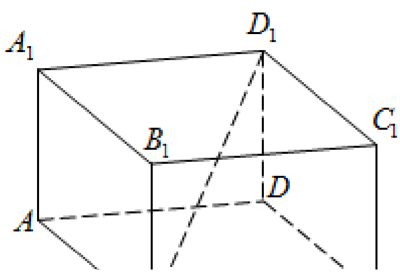


Решение.

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.

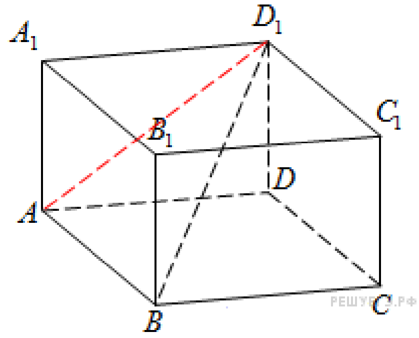
Ответ: 44.

10. B 10 № 916. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1=5$; $CC_1=3$; $B_1C_1=\sqrt{7}$. Найдите длину ребра AB.



Решение.

По теореме Пифагора



$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{CC_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{9+7} = 4.$$

Тогда длина ребра равна AB

$$AB = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{25-16} = 3.$$

Ответ: 3.

11. B 11 № 77386. Найдите значение выражения $(9b^2-49)\left(\frac{1}{3b-7}-\frac{1}{3b+7}\right)+b-13$ при $b=345$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(9b^2-49)\left(\frac{1}{3b-7}-\frac{1}{3b+7}\right)+b-13=(3b-7)(3b+7)\frac{3b+7-(3b-7)}{(3b-7)(3b+7)}+b-13=14+b-13=b+1=346$$

.

Ответ: 346.

12. B 12 № 27989. Автомобиль, масса которого равна $m = 2160$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 500$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 2400 Н. Ответ выразите в секундах.

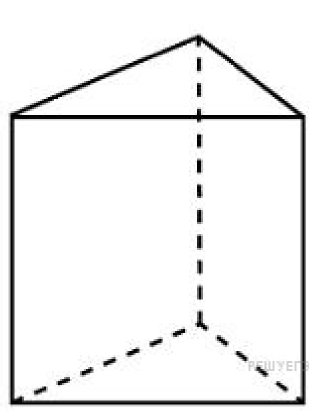
Решение.

Найдем, за какое время автомобиль пройдет путь $S = 500$ метров, учитывая, что сила F при заданном значении массы автомобиля 2400 Н. Задача сводится к решению неравенства $\frac{2mS}{t^2} \geq 2400$ при заданном значении массы автомобиля $m = 2160$ кг:

$$\frac{2\cdot 2160\cdot 500}{t^2} \geq 2400 \Leftrightarrow t^2 \leq 900 \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t \leq 30 \text{ с}.$$

Ответ: 30.

13. B 10 № 27151. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



Решение.

Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Пусть $2S$ км — весь путь путешественника, тогда средняя скорость равна:

$$\frac{2S}{\frac{S}{20}+\frac{S}{480}} = \frac{2\cdot 480}{25} = 38,4 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 38,4.

15. B 15 № 77420. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

Решение.

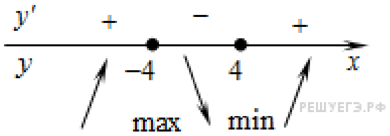
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16).$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

16. C 1 № 485932. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

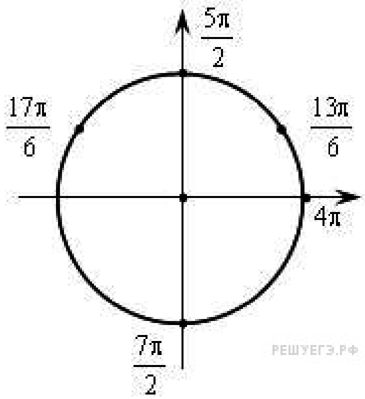
Решение.

Используем формулу приведения и синуса двойного угла:

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

Тогда $\cos x = 0$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Находим:



$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}.$$

Ответ:

а) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k; x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{17\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{2}$.

Примечание.

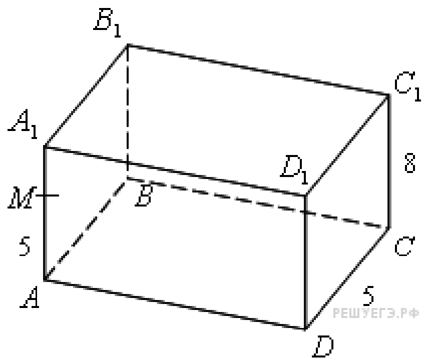
Уравнение может быть так же решено при помощи следующей теоремы:

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

17. C 2 № 484558. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12, AB = 5, AA_1 = 8$. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$.

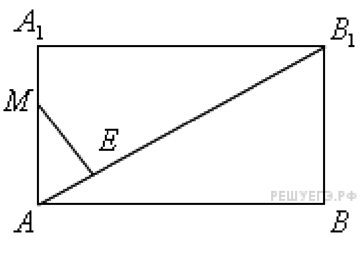
Решение.

Заметим, что $V_{MB_1C_1D} = \dfrac{1}{3}S_{B_1C_1D} \cdot h_M$. Площадь прямоугольного треугольника, лежащего в основании, равна половине произведения катетов: $S_{B_1C_1D} = 6\sqrt{89}$.



Основание пирамиды лежит в плоскости AB_1C_1D, поэтому высотой пирамиды будет являться перпендикуляр, опущенный из точки M на эту плоскость. Опустим перпендикуляр ME на прямую AB_1. Поскольку $ME \perp AB_1$ и $ME \perp AD$, в силу того, что $(AD) \perp (AA_1B_1B)$, отрезок ME является высотой пирамиды: $ME = h_M$.

Треугольник AME подобен треугольнику ABB_1, значит,



$$ME = \frac{AM \cdot AB}{AB_1} = \frac{25}{\sqrt{89}},$$

$$V_{MB_1C_1D} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{89} \cdot \frac{25}{\sqrt{89}} = 50.$$

Ответ: 50.

18. C 3 № 500640. Решите систему $\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7, \\ \dfrac{2x^2 - 4x}{x - 4} \le 0. \end{cases}$

Решение.

Произведем эквивалентные преобразования системы

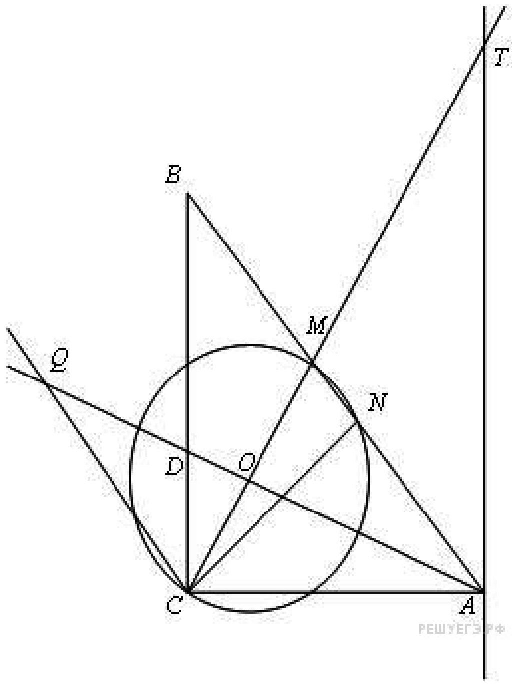
$$\begin{cases} 2^x+6\cdot 2^{-x}\le 7, \\ \dfrac{2x^2-4x}{x-4}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x-7\cdot 2^x+6\le 0, \\ \dfrac{x^2-2x}{x-4}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x-1)(2^x-6)\le 0, \\ \dfrac{x(x-2)}{x-4}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le \log_2 6, \\ \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ 2\le x<4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2\le x\le \log_2 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\}\cup[2,\log_2 6]$.

19. C 4 № 485990. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=15$, $AC=9$ и $BC=12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD— точка O, причем $CD=4$ и $AO=3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.

Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\dfrac{AO}{OD}=3$, поэтому $AT=3CD=12$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина стороны AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла равна половине гипотенузы, значит $CM=\dfrac{1}{2}AB=7{,}5$.



Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q— точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{1}{2}$, поэтому $CQ=\dfrac{1}{2}AB=7{,}5=AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM=OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM=\dfrac{1}{2}AB=7{,}5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN\perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

Отсюда $CN=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{9\cdot 12}{15}=\dfrac{36}{5}=7{,}2.$

Ответ: 7,5 или 7,2.

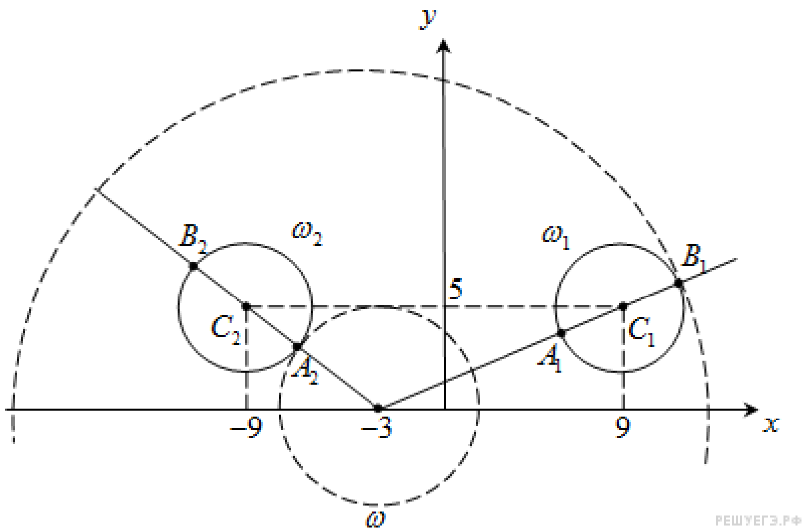
20. C 5 № 485952. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2+(y-5)^2=9, \\ (x+3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение задаёт на плоскости окружности ω_1 и ω_2 радиуса 3 ,симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей — точки $C_1\,(9;\ 5)$ и $C_2\,(-9;5)$. Второе уравнение — уравнение окружности ω радиуса $a>0$ с центром $C\,(-3;\ 0)$.



Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается одной из окружностей ω_1 и ω_2, но не имеет общих точек с другой окружностью.

Из точки C проведём лучи CC_1 и CC_2 и обозначим A_1, B_1, A_2, B_2 точки их пересечения с окружностями ω_1 и ω_2 (см. рис.).

Заметим, что $CC_2<CC_1$, поэтому $CA_2<CA_1$ и $CB_2<CB_1$. Значит, если $a=CA_2$, то ω касается ω_2, но не имеет общих точек с ω_1. Если $a=CB_1$, то ω касается ω_1, но не имеет общих точек с ω_2.

$$CA_2=CC_2-C_2A_2=\sqrt{(9-3)^2+5^2}-3=\sqrt{61}-3;$$

$$CB_1=CC_1+C_1B_1=\sqrt{(9+3)^2+5^2}+3=13+3=16.$$

Сравним CA_1 и CB_2:

$$CA_1=\sqrt{(9+3)^2+5^2}-3=10, CB_2=\sqrt{(9-3)^2+5^2}+3=\sqrt{61}+3.$$

Получаем $CA_1<CB_2$. Значит, если ω касается ω_1 в точке A_1, то ω пересекает ω_2 в двух точках. Аналогично, если ω касается ω_2 в точке B_2, то ω пересекает ω_1 в двух точках. Следовательно, других решений, кроме двух найденных, система не имеет.

Ответ: $\sqrt{61}-3$ или 16.

21. C 6 № 484669. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\dfrac{a^4+12a^2-5}{a^3+11a}$ можно сократить на b.

Решение.

Если целые числа a^4+12a^2-5 и a^3+11a делятся на b, то целое число

$$(a^4+12a^2-5)-a(a^3+11a)=a^2-5$$

также делится на b.

Тогда число

$$(a^3+11a)-a(a^2-5)=16a$$

тоже делится на b.

Тогда число

$$16(a^2-5)-a\cdot 16a=-80$$

также делится на b.

Таким образом, искомое b — простой делитель числа 80, то есть 2 или 5. Осталось проверить, для каких из найденных чисел можно подобрать a. Если а нечетное, то числитель и знаменатель данной дроби — четные числа, поэтому дробь можно сократить на 2. Если a кратно 5, то числитель и знаменатель данной дроби также кратны 5, поэтому дробь можно сократить на 5.

Ответ: 2, 5.