Вариант № 2917715

1. B 2 № 318582. В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять 1/10 фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 3 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Решение.

Поскольку на 10 человек следует взять 0,1 фунта чернослива, на одного человека следует взять 0,01 фунта чернослива. Тогда на трех человек потребуется 0,03 фунта чернослива, что составляет $0{,}03 \cdot 0{,}4 = 0{,}012$ кг или 12 грамм.

Ответ: 12.

2. B 2 № 26621. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1000 рублей?

Решение.

С учетом наценки горшок станет стоить $120 + 0{,}2 \cdot 120 = 144$ рубля. Разделим 1000 на 144:

$$\frac{1000}{144} = \frac{125}{18} = \frac{108+17}{18} = \frac{108}{18} + \frac{17}{18} = 6\frac{17}{18}.$$

Значит, можно будет купить 6 горшков.

Ответ: 6.

3. B 3 № 263737.

На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.

Решение.

Из графика видно, что наибольшая и наименьшая цены за указанный период составили 172 рубля и 144 рубля соответственно (см. рисунок). Их разность равняется 28 рублям.

Ответ: 28.

4. B 4 № 41055.

При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 13 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 50 мешков цемента. Тонна камня стоит 1450 рублей, щебень стоит 700 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

Решение.

Рассмотрим два варианта.

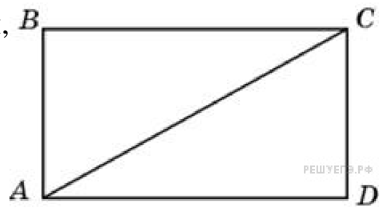
Стоимость каменного фундамента складывается из стоимости камня $9 \cdot 1450 = 13\ 050$ руб., а также стоимости цемента $13 \cdot 220 = 2860$ руб. Всего $2860 + 13\ 050 = 15\ 910$ руб.

Стоимость бетонного фундамента складывается из стоимости цемента $50 \cdot 220 = 11\ 000$ руб., а также стоимости щебня $7 \cdot 700 = 4900$ руб. Всего $4\ 900 + 11\ 000 = 15\ 900$ руб.

Стоимость самого дешевого варианта составляет 15 900 рублей.

Ответ: 15 900.

5. B 5 № 27607. Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как 4:5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.



Решение.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна $4a$, тогда диагональ равна $5a$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $16a^2 + 36 = 25a^2$, тогда $9a^2 = 36$, откуда $a = 2$. Поэтому $S = 8 \cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

6. B 6 № 320179. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?

Решение.

Натуральных чисел от 10 до 19 десять, из них на три делятся три числа: 12, 15, 18. Следовательно, искомая вероятность равна 3:10 = 0,3.

Ответ: 0,3.

7. B 7 № 99757.

Решите уравнение $\frac{6}{x^2+2} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{6}{x^2+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array} \right.$$

Ответ: 2.

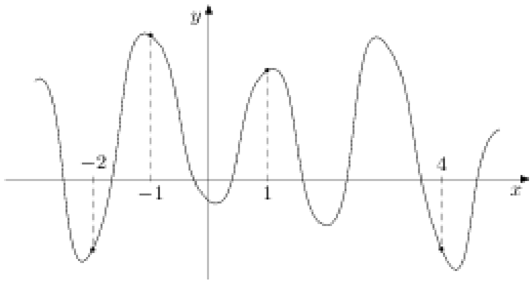
8. B 5 № 27780. На рисунке угол 1 равен 46°, угол 2 равен 30°, угол 3 равен 44°. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.

Решение.
сумма углов в выпуклом четырехугольнике равна 360°.

$$\angle 4 = 360^\circ - \angle 1 - (180^\circ - \angle 1 - \angle 2) - (180^\circ - \angle 1 - \angle 3) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 120^\circ.$$

Ответ: 120.

9. B 9 № 317544. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

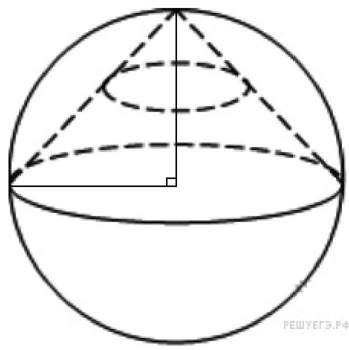


Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший.

Ответ:4.

10. B 10 № 316555. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Решение.
Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:



$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Поскольку по условию образующая равна $7\sqrt{2}$, радиус сферы равен 7.

Ответ:7.

11. B 11 № 26862. Найдите значение выражения $\log^2_{\sqrt{7}} 49$.

Решение.
Выполним преобразования:

$$\log^2_{\sqrt{7}} 49 = (2 \cdot 2\log_7 7)^2 = 16.$$

Ответ: 16.

Решение.

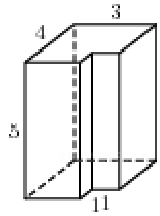
Пусть p и V – начальные, а p_1 и V_1 – конечные значения объема и давления газа, соответственно. Задача сводится к решению неравенства $\frac{p}{p_1} \geq 27$, причем $\frac{V_1}{V} = 3$:

$$\left(\frac{V}{V_1}\right)^a \geq 27 \Leftrightarrow 3^a \geq 27 \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Значит, наименьшее значение константы a равно 3.

Ответ: 3.

13. B 10 № 25581. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



14. B 14 № 99577. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1 кг, а масса 60-процентного – m_2. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36(m_1 + m_2 + 10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 + 0,5 \cdot 10 = 0,41(m_1 + m_2 + 10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36m_1 + 0,36m_2 + 3,6, \\ 0,3m_1 + 0,6m_2 + 5 = 0,41m_1 + 0,41m_2 + 4,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,24m_2 - 0,06m_1 = 3,6, \\ 0,11m_1 - 0,19m_2 = 0,9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m_2 - m_1 = 60, \\ 11m_1 - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 11(4m_2 - 60) - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 25m_2 = 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 60, \\ m_2 = 30. \end{cases}$$

Ответ: 60.

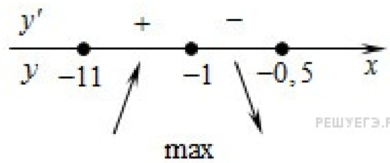
15. B 15 № 129961. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2+1}{x}$ на отрезке $[-11; -0,5]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 1 и −1, заданному отрезку принадлежит только число −1. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наибольшим значением функции на заданном отрезке будет $y(-1)$. Найдем его:

$$y(-1) = \frac{2}{-1} = -2.$$

Ответ: −2.

16. С 1 № 503146. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

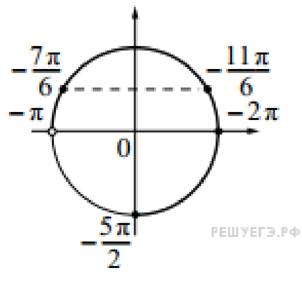
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right)$.

Решение.

Поскольку $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$, имеем:

$$1-2\sin^2 x = 1-\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi k,\\ x = \frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x = \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие заданному промежутку (см. рис.). Получаем числа: $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.

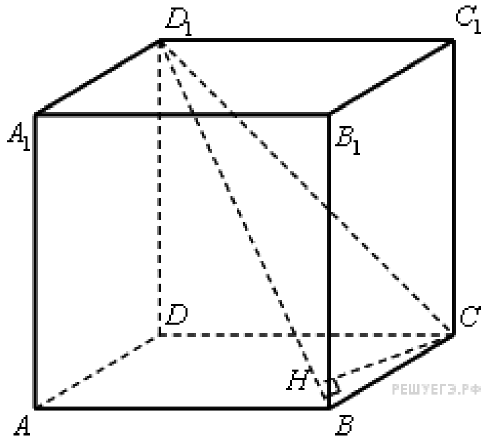


Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.

17. С 2 № 484570. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.

Решение.

Проведем отрезок CD_1 и опустим перпендикуляр CH на BD_1.



Искомое расстояние равно высоте CH прямоугольного треугольника BCD_1 с прямым углом C:

$$CH = \frac{2S_{BCD_1}}{BD_1} = \frac{CD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

18. C 3 № 501731. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x}(16-x^2) \le 1, \\ 2x+1-\dfrac{21x+39}{x^2+x-2} \ge -\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}(16-x^2) \le 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{4-x}(4-x)(4+x) \le 1 \Leftrightarrow\; \log_{4-x}(4+x) \le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \le 0, \\ 0 < 4-x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \le 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{откуда } 3 < x < 4.$$

Второй случай: $4-x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \le 0, \\ 4-x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \le 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{откуда} -4 < x \le -3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4 < x \le -3;\ 3 < x < 4.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$2x+1-\frac{21x+39}{x^2+x-2} \ge -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x+1-\frac{20(x+2)}{(x+2)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \ge -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x+1-\frac{20}{x-1} \ge 0, \text{где } x \ne -2;\; \frac{(x+3)(2x-7)}{x-1}, \text{где } x \ne -2.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $-3 \le x < -2;\ -2 < x < 1;\ x \ge \frac{7}{2}.$

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3;\ x=0;\ \frac{7}{2} \le x < 4.$

Ответ: $-3;\ \left[\frac{7}{2};4\right).$

19. C 4 № 502117. Окружность радиуса $8\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 12. Найдите MN.

Решение.

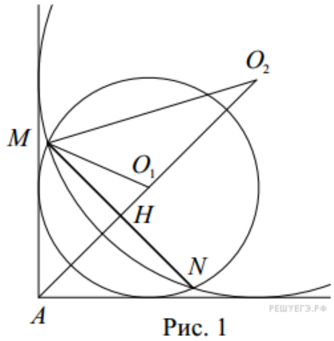


Рис. 1

Пусть O_1 — центр окружности радиуса $8\sqrt{2}$, O_2 — центр второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда

$$O_1A = \frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 16.$$

Возможны два случая. Первый случай: точка O_1 лежит между точками A и O_2 (рис. 1), тогда $O_2A = O_1A + O_1O_2 = 28$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 14\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 12$, $O_1M = 8\sqrt{2}$, $O_2M = 14\sqrt{2}$. Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 6 + 11\sqrt{2}$.

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_1M)} = 6\sqrt{103},$$

откуда $MH = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \sqrt{103}$; $MN = 2MH = 2\sqrt{103}$.

Второй случай: точка O_2 лежит между точками A и O_1 (рис. 2), тогда O_2A,=$O_1A - O_1O_2$ откуда ра диус второй окружности $O_2M = 2\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 12$, $O_1M = 8\sqrt{2}$, $O_2M = 2\sqrt{2}$. Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 6 + 11\sqrt{2}$.

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_1M)} = 6\sqrt{7},$$

откуда $MH = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \sqrt{7}$; $MN = 2MH = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$ или $2\sqrt{103}$.

20. C 5 № 500819. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-8x+7\geq 0: f(x)=x^2+2(a-4)x+7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$;

б) при $x^2-8x+7<0: f(x)=-x^2+(2a+8)x-7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

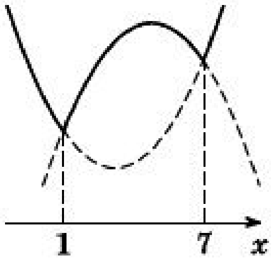


Рис. 1

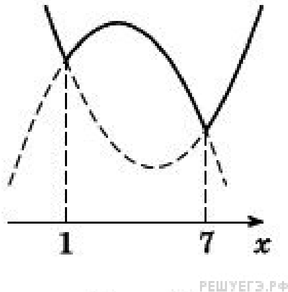


Рис. 2

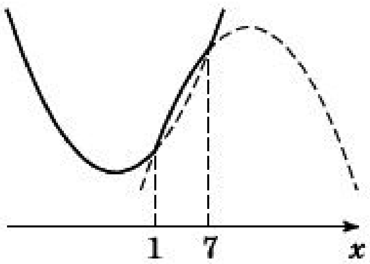


Рис. 3

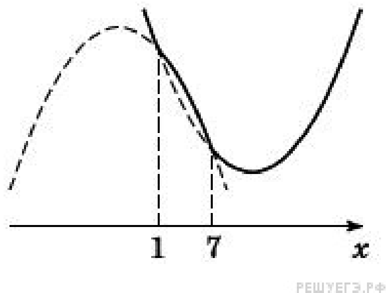


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может принять только в точках $x=1$ или $x=7$, а если $4-a\notin[1;7]$ — то в точке $x=4-a$.

3. Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{1}{14}, \\ 2a^2-8a+1-|a^2-9|<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\not\Rightarrow$ [

21. C 6 № 500136. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\dfrac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\dfrac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков МОГЛО быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетило не более 2 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}$, что больше $\frac{2}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+10}=\frac{8}{18}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 9.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Нулем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию

$$\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{2}{11},\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{2}{5},$$

значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{2}{9},\frac{m_2}{d}\le\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{8}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{8}{9}+1}=\frac{9}{17}.$$

Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$.

Ответ: а) да: б) 9; в) $\frac{9}{17}$.