Вариант № 2917717

1. B 2 № 282848. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 31 руб. 20 коп. Сдачи клиент получил 1 руб. 60 коп. Сколько литров бензина было залито в бак?

Решение.

Поскольку сдача составляет 1 руб. 60 коп., на бензин потрачено 998 руб. 40 коп. Разделим 998,4 на 31,2, получим 32. Итак, в бак было залито 32 литра бензина.

2. B 2 № 26619. Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Решение.

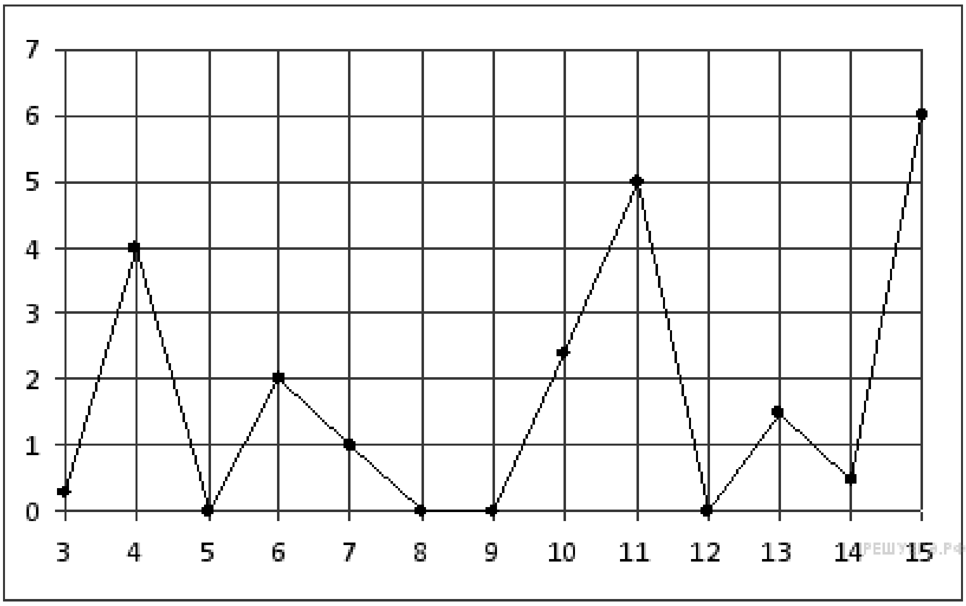
После повышения цены ручка станет стоить $40 + 0{,}1 \cdot 40 = 44$ рубля. Разделим 900 на 44:

$$\frac{900}{44} = \frac{225}{11} = \frac{220+5}{11} = \frac{220}{11} + \frac{5}{11} = 20\frac{5}{11}.$$

Значит, можно будет купить 20 ручек.

Ответ: 20.

3. B 3 № 27523. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.



Решение.

Из графика видно, что 4 дня из данного периода (5, 8, 9, 12 февраля) не выпадало осадков (см. рисунок).

Ответ: 4.

4. B 4 № 245557.
Мебельный салон заключает договоры с производителями мебели. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу мебели, поступает в доход мебельного салона.

Фирма-производитель	**Процент от выручки, поступающий в доход салона**	**Примечания**
«Альфа»	6,5 %	Изделия ценой до 20 000 руб.
«Альфа»	2,5 %	Изделия ценой свыше 20 000 руб.
«Бета»	3 %	Все изделия
«Омикрон»	5 %	Все изделия

В прейскуранте приведены цены на четыре кресла-качалки. Определите, продажа какого кресла-качалки наиболее выгодна для салона. В ответ запишите, сколько рублей поступит в доход салона от продажи этого кресла-качалки.

Фирма-производитель	**Изделие**	**Цена**
«Альфа»	Кресло-качалка «Ода»	16 500 руб.
«Альфа»	Кресло-качалка «Сага»	23 500 руб.
«Бета»	Кресло-качалка «Поэма»	20 500 руб.
«Омикрон»	Кресло-качалка «Элегия»	18 000 руб.

Решение.
Рассмотрим все варианты.

При продаже кресла-качалки «Ода» по цене 16 500 руб. доход салона составит $16\,500 \cdot 0{,}065 = 1\,072{,}5$ руб.

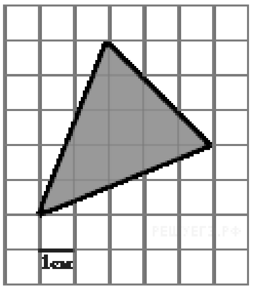
При продаже кресла-качалки «Сага» по цене 23 500 руб. доход салона составит $23\,500 \cdot 0{,}025 = 587{,}5$ руб.

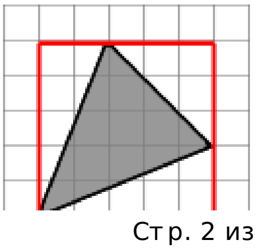
При продаже кресла-качалки «Поэма» по цене 20 500 руб. доход салона составит $20\,500 \cdot 0{,}03 = 615$ руб.

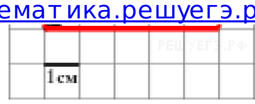
При продаже кресла-качалки «Элегия» по цене 18 000 руб. доход салона составит $18\,000 \cdot 0{,}05 = 900$ руб.

Поэтому для салона наиболее выгодна продажа кресла-качалки «Ода» фирмы «Альфа», доход от которого составит 1072,5 рубля.

5. B 5 № 27548. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.







6. B 6 № 320199. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, З. нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых З. сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D)=P(C)+P(D)-P(C\cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D))=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D)=P(A)\cdot P(B)\cdot(P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$=0,6\cdot 0,8\cdot(0,7+0,5-0,7\cdot 0,5)=0,408.$$

Ответ: 0,408.

Приведем другую запись этого решения.

В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: $0,6\cdot0,8\cdot0,7 = 0,336$, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: $0,6\cdot0,8\cdot0,5 = 0,24$, вероятность успешно сдать экзамены и на лингвистику, и на коммерцию: $0,6\cdot0,8\cdot0,7\cdot0,5 = 0,168$. Успешная сдача экзаменов на лингвистику и на коммерцию — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью $0,336 + 0,24 - 0,168 = 0,408$.

7. B 7 № 77368. Решите уравнение $(2x+7)^2=(2x-1)^2$.

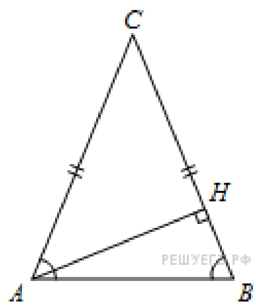
Решение.

Выполним преобразования, используя формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

$$(2x+7)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+28x+49=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 32x=-48 \Leftrightarrow x=-1,5.$$

Ответ: −1,5.

8. B 8 № 27331. В треугольнике ABC $AC=BC$, высота AH равна 20, $AB=25$. Найдите $\cos BAC$.



Решение.

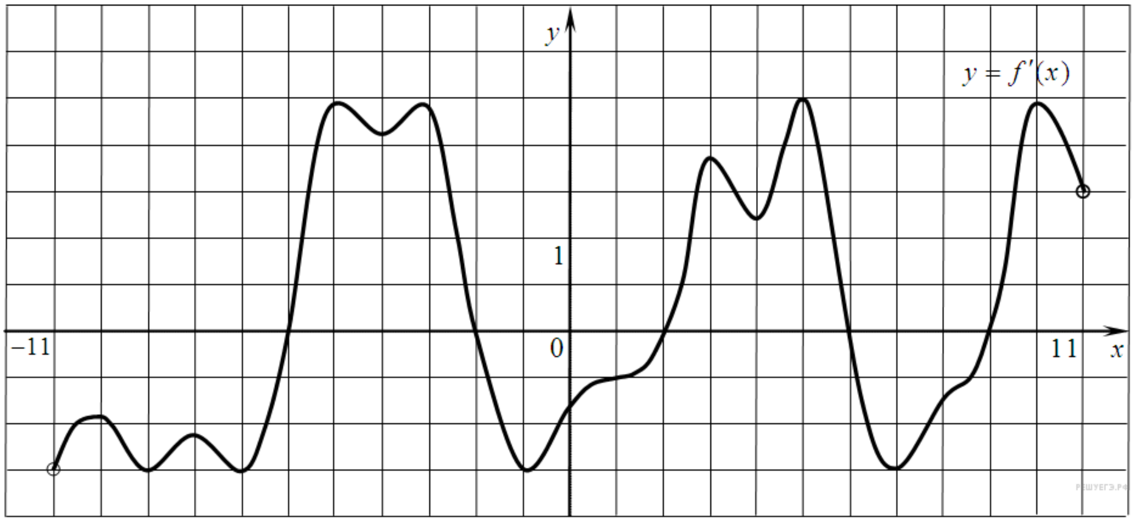
Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$\cos\angle BAC = \cos\angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AH^2}}{AB} = \frac{\sqrt{625-400}}{25} = \frac{15}{25} = 0,6$$

.

Ответ: 0,6.

9. B 9 № 27496. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].



Решение.

Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной — изображенным на графике нулем производной. Производная обращается в нуль в точках −6, −2, 2, 6, 9. На отрезке [−10; 10] функция имеет 5 точек экстремума.

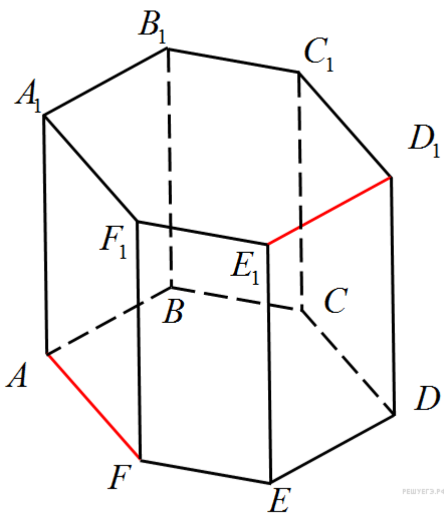
Ответ: 5.

10. B 10 № 316553. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Отрезки D_1E_1, DE и AB лежат на параллельных прямых, поэтому искомый угол между прямыми FA и E_1D_1 равен углу между прямыми FA и AB.

Поскольку угол FAB между сторонами правильного шестиугольника равен 120°, смежный с ним угол между прямыми FA и AB равен 60°.



Ответ:60.

11. B 11 № 26814. Найдите значение выражения $18x^7 \cdot x^{13} : (3x^{10})^2$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$18x^7 \cdot x^{13} : (3x^{10})^2 = \frac{18x^{7+13}}{9x^{20}} = 2.$$

Ответ: 2.

12. B 12 № 28010. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м и со скоростью течения $u = 0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u}\mathrm{ctg}\alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

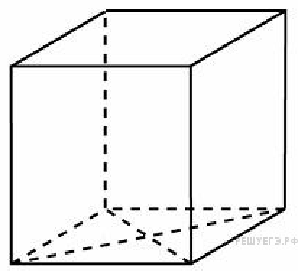
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\frac{L}{u} ctg\alpha \le 200$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях длины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0,5$ м/с:

$$\frac{100}{0,5} ctg\alpha \le 200 \Leftrightarrow ctg\alpha \le 1 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \le \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

13. B 10 № 27062. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



14. B 14 № 26583. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч — скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым, тогда скорость второго велосипедиста — $v-1$ км/ч, $v > 1$. Первый велосипедист прибыл к финишу на 1 час раньше второго, отсюда имеем:

$$\frac{240}{v} + 1 = \frac{240}{v-1} \Leftrightarrow \frac{240+v}{v} = \frac{240}{v-1} \underset{v>1}{\Leftrightarrow} 240v + v^2 - 240 - v = 240v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 - v - 240 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 16; \\ v = -15 \end{array}\right. \underset{v>1}{\Leftrightarrow} v = 16.$$

Значит, первым финишировал велосипедист, двигавшийся со скоростью 16 км/ч.

Ответ: 16.

15. B 15 № 77458. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$на отрезке $[1;9]$.

Решение.

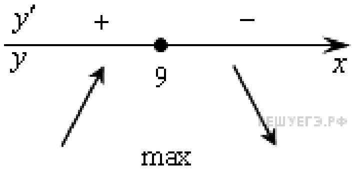
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} -\sqrt{x} + 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y(9) = -\frac{2}{3} \cdot 27 + 3 \cdot 9 + 1 = 10.$$

Ответ: 10.

16. C 1 № 500592. а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1{,}25$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1{,}25 \Leftrightarrow 1 + \sin^2 x = 1{,}25$$

В результате получим:

$$\sin^2 x = 0{,}25 \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

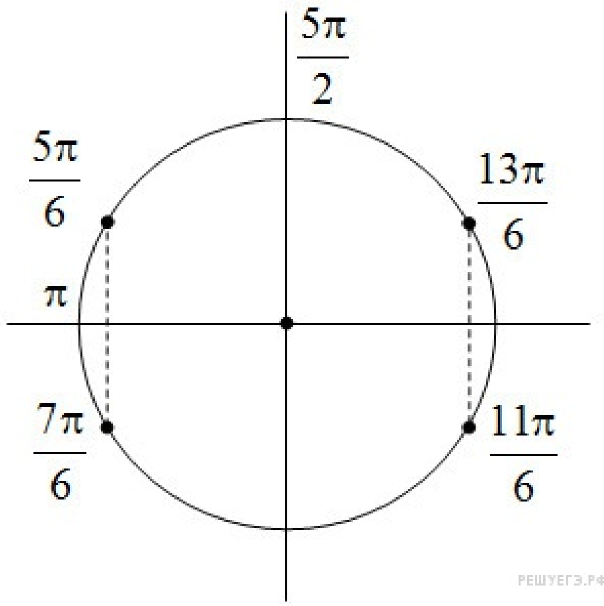
Значит

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности.

Отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.



Ответ:

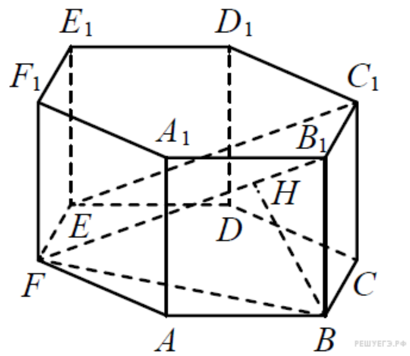
А) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Б) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.

17. C 2 № 500468. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

Решение.

Прямые BB_1 и FB перпендикулярны прямой EF. Плоскость FB_1C_1, содержащая прямую EF, перпендикулярна плоскости BB_1F. Значит, искомое расстояние равно высоте BH прямоугольного треугольника BB_1F, в котором $BB_1 = 1$, $BF = \sqrt{3}$, $B_1F = 2$:



$$BH = \frac{BB_1 \cdot BF}{B_1F} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. C 3 № 500113. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + 32 \cdot 2^{-x} \geq 33, \\ 2\log_9\left(4x^2+1\right) \geq \log_3\left(3x^2+4x+1\right). \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^x$, тогда:

$$y + \frac{32}{y} \geq 33 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 33y + 32}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-32)}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < y \leq 1, \\ y \geq 32. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x \leq 1, \\ 2^x \geq 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы. Используя формулу $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$, получаем:

$$2\log_9(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1 > 0, \\ 3x^2+4x+1 > 0, \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -\frac{1}{3} < x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{array}\right.$$

Тем самым, решениями исходной системы неравенств являются $x < -1, -\frac{1}{3} < x \leq 0, x \geq 5.$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup [5; +\infty).$

19. C 4 № 501398. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

Решение.

Пусть точки O и P — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD соответственно, R и r — радиусы этих окружностей, а точки E и F — точки, в которых окружности касаются отрезка BD. Из прямоугольных треугольников ABD и BCD находим:

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=24,\ R=\frac{AD+BD-AB}{2}=\frac{24+10-26}{2}=4,$$

$$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=10,5,\ r=\frac{CD+BD-BC}{2}=\frac{10,5+10-14,5}{2}=3.$$

Опустим из точки O перпендикуляр OK на прямую FP (см. рис. 1, 2). Искомое расстояние OP находим из прямоугольного треугольника OKP: $OP=\sqrt{OK^2+PK^2}$.

1 случай (точка D лежит между точками A и C, см. рис. 1):

$$OK=EF=DE-EF=R-r,$$

$$PK=PF+FK=PF+EO=R+r,$$

$$OP=\sqrt{(R-r)^2+(R+r)^2}=5\sqrt{2}.$$

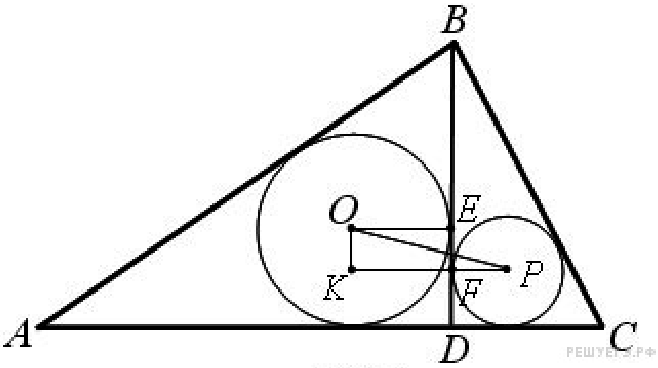


*Рис.*1

2 случай (точка C лежит между точками A и D, см. рис. 2):

$$OK=EF=DE-EF=R-r,$$

$$PK=FK-PF=EO-PF=R-r,$$

$$OP=\sqrt{(R-r)^2+(R-r)^2}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$.

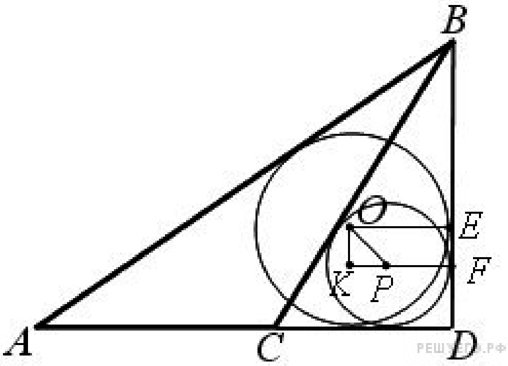


*Рис.*2

20. C 5 № 502057. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-10a+5\sqrt{x^2+25}=4|x-5a|-8|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим две функции: $f(x)=a^2-10a+5\sqrt{x^2+25}$ и $g(x)=4|x-5a|-8|x|$.

Поскольку $x^2\geq 0$, получаем :$f(x)\geq f(0)=a^2-10a+25$.

Функция $g(x)=4|x-5a|-8|x|$ является кусочно-линейной функцией, причем при $x<0$ угловой коэффициент равен либо 4, либо 12, а при $x>0$ угловой коэффициент равен либо -4, либо -12. Значит, функция $g(x)$ возрастает при $x<0$ и убывает при $x>0$, поэтому $g(x)\leq g(0)=20|a|$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(0)\leq g(0)$:

$$a^2-10a+25\leq 20|a| \Leftrightarrow a^2-10a-20a+25\leq 0.$$

Значит, либо $\begin{cases} a^2-30a+25\leq 0, \\ a\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad 15-10\sqrt{2}\leq a\leq 15+10\sqrt{2},$ либо $\begin{cases} a^2+10a+25\leq 0, \\ a<0, \end{cases} \Leftrightarrow a=-5.$

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при $a=-5$ и при $15-10\sqrt{2}\leq a\leq 15+10\sqrt{2}$ и не имеет корней при других значениях a

Ответ: $\{-5\}\cup[15-10\sqrt{2};\ 15+10\sqrt{2}]$.

21. C 6 № 484661. Перед каждым из чисел 3, 4, 5, . . . 11 и 14, 15, . . . 18 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа обоих наборов взяты с плюсами, то сумма максимальна и равна

$$5(3+\ldots+1)+9(14+\ldots+18)=5\left(\frac{3+11}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{14+18}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 23=1035.$$

2. Так как сумма нечетная, число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получены сумм будет не четной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$5(3+4+5+6+7-8-9+10+11)+9(14-15-16-17+18)=5\cdot 29+9\cdot(-16)=145-144=1.$

Ответ: 1 и 1035.