Вариант № 2917718

1. B 1 № 26632. Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 литра бензина — 20 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

Решение.

Средний расход бензина за месяц составил $(6000 : 100) \cdot 9 = 540$ литров. Умножим 540 на 20:

$$540 \cdot 20 = 10\,800.$$

Значит, за месяц таксист потратил 10 800 рублей.

Ответ: 10 800.

2. B 2 № 77344. Призерами городской олимпиады по математике стало 48 учеников, что составило 12% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

Решение.

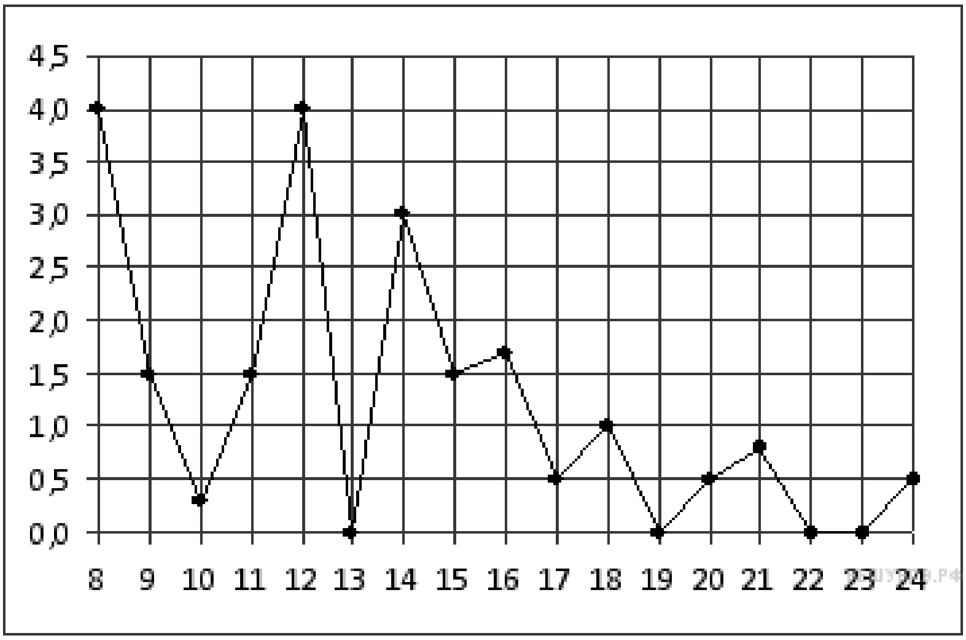
Разделим 48 на 0,12:

$$\frac{48}{0,12} = \frac{4800}{12} = 400.$$

Значит, в олимпиаде участвовало 400 человек.

Ответ: 400.

3. B 3 № 26876. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпадало в период с 13 по 20 января. Ответ дайте в миллиметрах.



Решение.

Из графика видно, что наибольшее количество осадков в период с 13 по 20 января выпало 14 января и составляло 3 мм (см. рисунок).

Ответ: 3.

4. B 4 № 26682. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	**2**	**3**
Автобусом	От дома до автобусной станции — 15 мин	Автобус в пути: 2 ч 15 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 5 мин.
Электричкой	От дома до станции желез-ной дороги — 25 мин.	Электричка в пути: 1 ч 45 мин.	От станции до дачи пешком 20 мин.
Маршрутным такси	От дома до остановки марш-рутного такси — 25 мин.	Маршрутное такси в дороге: 1 ч 35 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 40 минут

Решение.

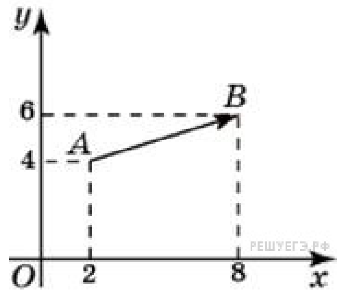
При поездке на автобусе потребуется времени 15 мин. + 2 ч. 15 мин. + 5 мин. = 2 ч. 35 мин.

При поездке электричкой потребуется времени 25 мин. + 1 ч. 45 мин. + 20 мин. = 2 ч. 30 мин. = 2,5 ч.

При поездке маршрутным такси потребуется времени 25 мин. + 1 ч. 35 мин. + 40 мин. = 2 ч. 40 мин.

Ответ: 2,5.

5. B 5 № 27723. Найдите сумму координат вектора $\vec{AB}$.



Решение.

Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $(8-2;\ 6-4)=(6,2)$. Поэтому сумма координат вектора $\vec{AB}$ равна 8.

Ответ: 8.

6. B 6 № 285926. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

Решение.

Вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике, равна

$$\frac{11}{55}=0,2.$$

Ответ: 0,2.

7. B 7 № 77369. Решите уравнение $(x-6)^2=-24x$.

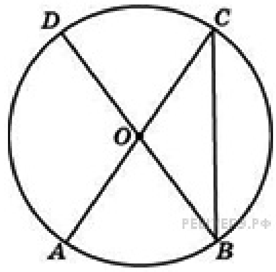
Решение.

Используем формулы квадрата разности и квадрата суммы:

$$(x-6)^2=-24x \Leftrightarrow x^2-12x+36=-24x \Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow (x+6)^2=0 \Leftrightarrow x=-6.$$

Ответ: –6.

8. B 8 № 27869. В окружности с центром O AC и BD – диаметры. Вписанный угол ACB равен 38°. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах.



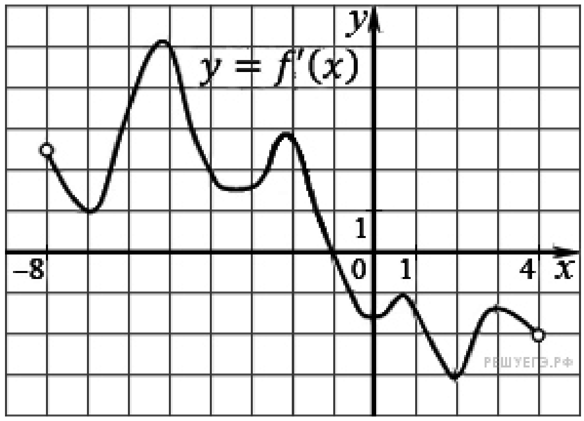
Решение.

вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности, значит,

$$\angle AOD=180^\circ-\angle AOB=180^\circ-2\angle ACB=180^\circ-76^\circ=104^\circ.$$

Ответ: 104.

9. B 9 № 27492. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

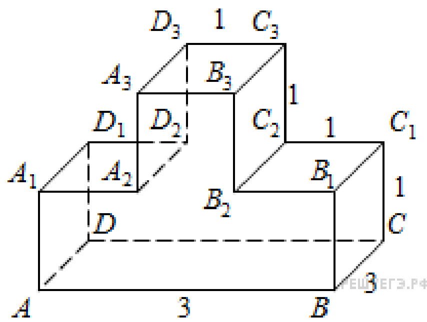


Решение.

На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -7.

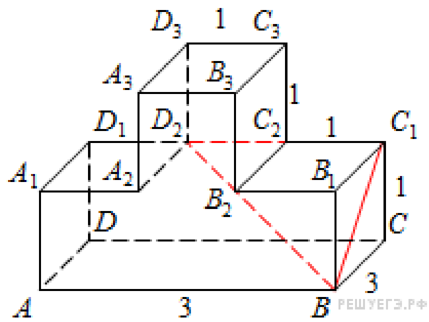
Ответ: –7.

10. B 10 № 245377. Найдите квадрат расстояния между вершинами B и D_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BC_1D_2. По теореме Пифагора



$$BD_2^2=BC_1^2+C_1D_2^2=BC^2+CC_1{}^2+(C_1C_2+D_3C_3)^2=9+1+4=14.$$

Ответ: 14.

11. B 11 № 26743. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}=\sqrt{\frac{2,8\cdot 4,2}{0,24}}=\sqrt{\frac{28\cdot 42}{24}}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 7.

12. B 12 № 28004. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L=\dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0=20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L\geq 20$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0=20\ \text{м}/\text{с}$ и ускорения свободного падения $g=10\ \text{м}/\text{с}^2$:

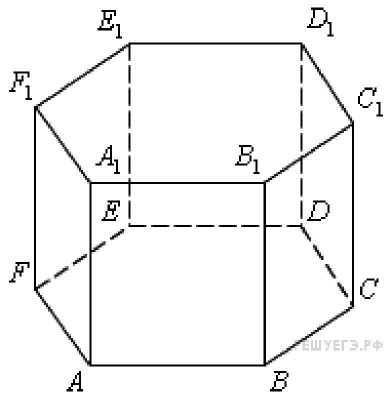
$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha\geq 20\Leftrightarrow \sin 2\alpha\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ+360^\circ n\leq 2\alpha\leq 150^\circ+360^\circ n\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}30^\circ\leq 2\alpha\leq 150^\circ\underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow}15^\circ\leq\alpha\leq 75^\circ.$$

Ответ: 15.

13. B 10 № 245343. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



14. B 14 № 26579. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на первой половине пути равна $v-13$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 2. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{2}{v}=\frac{1}{78}+\frac{1}{v-13}\underset{v>48}{\Leftrightarrow}2\cdot 78(v-13)=v^2-13v+78v\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2-91v+52\cdot 39=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} v=52; \\ v=39\end{array}\right.\underset{v>48}{\Leftrightarrow}v=52.$$

Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 52 км/ч.
Ответ: 52.

15. B 15 № 26694. Найдите наименьшее значение функции $y=5\cos x-6x+4$на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y'=-5\sin x-6$. Уравнение $y'=0$ не имеет решений, про изводная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0)=5\cos 0-6\cdot 0+4=5+4=9.$$

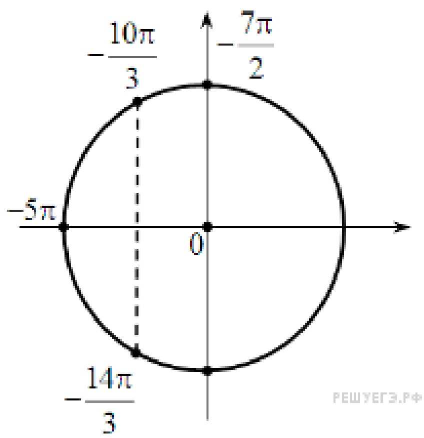
Ответ: 9.

16. C 1 № 500212. а) Решите уравнение $6\sin^2 x+5\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде



$$6-6\cos^2 x+5\cos x-2=0\Leftrightarrow 6\cos^2 x-5\cos x-4=0\Leftrightarrow$$
$$(3\cos x-4)(2\cos x+1)=0$$

Значит, или $\cos x=\frac{4}{3}$ — уравнение не имеет корней, или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.

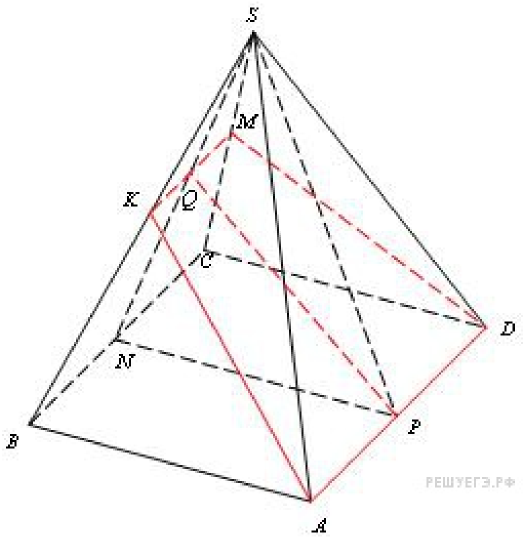
Получим число $-\frac{14\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{14\pi}{3}$.

17. C 2 № 485988. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA=\sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM, где M — середина ребра SC.

Решение.

Построим сечение $ADMK$, где K — середина ребра SB. Прямая BC параллельна AD, значит, искомое расстояние равно расстоянию до точки N плоскости ADM, где N — середина BC.



Пусть P — середина AD. Рассмотрим сечение NSP :

$$SN=SP=\sqrt{SA^2-AP^2}=\sqrt{5-1}=2.$$

Значит, треугольник SNP равносторонний. Искомое расстояние равно расстоянию от N до PQ, где Q — середина SN, PQ — медиана и высота треугольника SNP. Поэтому искомое расстояние равно $NQ=\frac{1}{2}SN=1$.

Ответ: 1.

18. C 3 № 501886. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x\le 9\cdot 2^x+22, \\ \log_3(x^2-x-2)\le 1+\log_3\frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Запишем его в виде $(2^x)^2-9\cdot 2^x-22\le 0$.

Сделав замену $t=2^x$, получим квадратное неравенство:

$$t^2-9t-22\le 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-11)\le 0 \Leftrightarrow -2\le t\le 11.$$

Значит, $-2\le 2^x\le 11$, откуда $x\le\log_2 11$.

Решим второе неравенство:

$$\log_3((x+1)(x-2))-\log_3\frac{x+1}{x-2}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\frac{(x+1)(x-2)^2}{x+1}\le 1, \\ (x+1)(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-2)^2\le 1, \\ (x+1)(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2\le 3, \\ (x+1)(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}\le x-2\le\sqrt{3}, \\ (x+1)(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x\le 2+\sqrt{3}.$$

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Сравним $\log_2 11$ и $2+\sqrt{3}$:

$$2+\sqrt{3}>2+1{,}5>3+\log_2\sqrt{2}>\log_2(8\cdot 1{,}4)=\log_2 11{,}2>\log_2 11.$$

Поэтому решением системы является полуинтервал: $(2;\log_2 11]$.

Ответ: $(2;\log_2 11]$.

19. C 4 № 485970. Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB=16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение.

Пусть CH — высота треугольника, r — радиус окружности, вписанной треугольник ABC, Q — центр этой окружности. Так как, $AH = 8$, то $AC = 10$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p = 18$, а его площадь $S = 48$, откуда $r = \frac{S}{p} = \frac{8}{3}$.

Пусть $\angle QAH = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{QH}{AH} = \frac{1}{3}$,

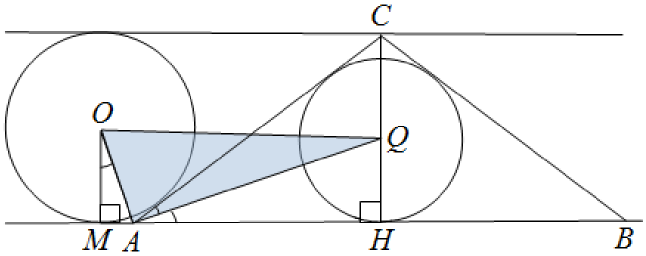


Рис. 1

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, AQ = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{8}{3}\sqrt{10}.$

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB — в точке M , и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 3.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO — биссектриса угла MAC . Тогда

$$\angle OAQ = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CAM) = 90^\circ,$$
$$\angle OAM = 90^\circ - \angle QAH = 90^\circ - \alpha, \angle AOM = \alpha,$$
$$AO = \frac{OM}{\cos\alpha} = \sqrt{10}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ = \sqrt{AQ^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{640}{9} + 10} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB — в точке M, и пересекает боковую сторону BC(рис. 2).

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQHс коэффициентом $\frac{OM}{QH} = 3 : \frac{8}{3} = \frac{9}{8}$, поэтому

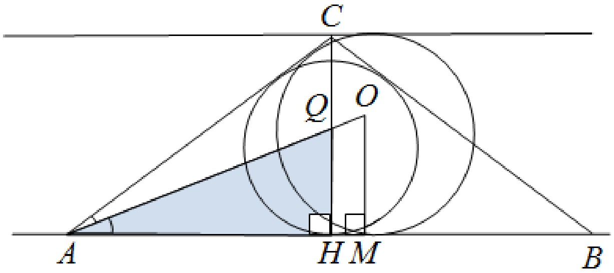


Рис. 2

$$AO = \frac{9}{8}AQ = \frac{9}{8}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{10} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

.

Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

20. C 5 № 500390. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x}=a-5|x|$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=a-5|x|$ и $g(x)=\sqrt{1-2x}$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$.

На промежутке $(-\infty;0)$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $(-\infty;0)$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f(0)>g(0)$, то есть при $a>1$.

При $x\geq 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $a-5x=\sqrt{1-2x}$. При $x>\frac{a}{5}$ левая часть этого уравнения отрицательна, следовательно, решений нет. При $x\leq\frac{a}{5}$ это уравнение сводится к квадратному уравнен и ю $25x^2+(2-10a)x+(a^2-1)=0$, дискриминант которог о $D=(2-10a)^2-100(a^2-1)=104-40a$, поэтому при $a>\frac{13}{5}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{5}{3}$ уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{12}{25}$; при $a<\frac{13}{5}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня,

$$x_1=\frac{10a-2-\sqrt{D}}{50}=\frac{a}{5}-\frac{2+\sqrt{D}}{50} \text{ и } x_2=\frac{10a-2+\sqrt{D}}{50}=\frac{a}{5}-\frac{2-\sqrt{D}}{50}.$$

Тогда меньший корень x_1 всегда меньше $\frac{a}{5}$, а больший корень x_2 не превосходит $\frac{a}{5}$, если $\sqrt{D}\leq 2$, то есть при $\frac{5}{2}\leq a<\frac{13}{5}$.

По теореме Виета:

$$x_1+x_2=\frac{10a-2}{25},\ x_1x_2=\frac{a^2-1}{25},$$

поэтому знаки корней x_1 и x_2 зависят от знаков выражений $\frac{10a-2}{25}$ и $\frac{a^2-1}{25}$. Значит, при $a<-1$ оба корня отрицательны, при $-1\leq a<1$ один из корней отрицательный, а другой неотрицательный, при $a\geq 1$ оба корня неотрицательны.

Таким образом, при $x\geq 0$ уравнение $a-5x=\sqrt{1-2x}$ не имеет корней при $a<1$ и $a>\frac{13}{5}$, имеет один корень при $1\leq a<\frac{5}{2}$ и $a=\frac{13}{5}$, имеет два корня при $\frac{5}{2}\leq a<\frac{13}{5}$.

Таким образом, уравнение $\sqrt{1-2x}=a-5|x|$ имеет следующее количество корней:

— нет корней при $a<1$;
— один корень при $a=1$ и $a>\frac{13}{5}$;
— два корня при $1<a<\frac{5}{2}$ и $a=\frac{13}{5}$;

— три корня при $\frac{5}{2} \le a < \frac{13}{5}$.

Ответ: $\frac{5}{2} \le a < \frac{13}{5}$.

21. C 6 № 500116. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?
б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?
Решение.
а) В такой прогрессии может быть три члена: например, 2, 4, 6.

б) В такой прогрессии может быть четыре члена: например, 1, 2, 3, 4.

Предположим, что существует такая арифметическая прогрессия, состоящая не менее чем из пяти членов. Рассмотрим любые пять её последовательных членов. Разделим каждый член на наибольший общий делитель всех пяти членов. Поскольку разности соседних членов уменьшатся в одинаковое число раз, полученные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 также образуют арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условию задачи. Заметим, что числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не могут все быть четными или все делиться на 3.

Если разность этой прогрессии делится на 3, то в ней не может быть члена, делящегося на 3 (иначе все члены прогрессии делятся на 3), поэтому все члены прогрессии являются степенями двойки. По скольку все члены не могут быть четными, получаем, что среди них присутствует 1. Но в этом случае разность прогрессии нечётна, поэтому чётные и нечётные члены прогрессии чередуются, а нечётных сте пеней двойки, отличных от 1, не существует.

Пусть теперь разность прогрессии d не делится на 3. Тогда если a_1 делится на 3, то члены $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$ и $a_5 = a_1 + 4d$ не делятся на 3, а $a_4 = a_1 + 3d$ делится на 3. Аналогично, если a_2 делится на 3, то из чисел a_1, a_3, a_4, a_5 на 3 будет делиться только a_5. Наконец, если a_3 делится на 3, то ни одно из чисел a_1, a_2, a_4, a_5 не делится на 3. Значит, найдутся два последовательных члена прогрессии, яв ляющиеся степенями двойки.

Если оба эти члена четны, то и все члены прогрессии чётны, чего не может быть. Поэтому одно из этих чисел - единица. Единица может стоять в прогрессии только на первом или пятом месте, в этом случае на 3 делится только a_3, поскольку единица — один из двух последовательных членов прогрессии, являющихся степенями двойки. Тогда a_1, a_2, a_4, a_5 являются степенями двойки. Разность прогрессии $d = a_2 - a_1 = a_5 - a_4$, значит, она чётна и все члены прогрессии чётны, чего не может быть.

Ответ: а) да; б) 4.