Вариант № 2917719

1. B 1 № 77338. В общежитии института в каждой комнате можно поселить четырех человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 83 иногородних студентов?

Решение.
Разделим 83 на 4:

$$\frac{83}{4}=20\frac{3}{4}.$$

Значит, для поселения 83 иногородних студентов необходима 21 комната.

Ответ: 21.

2. B 2 № 26621. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1000 рублей?

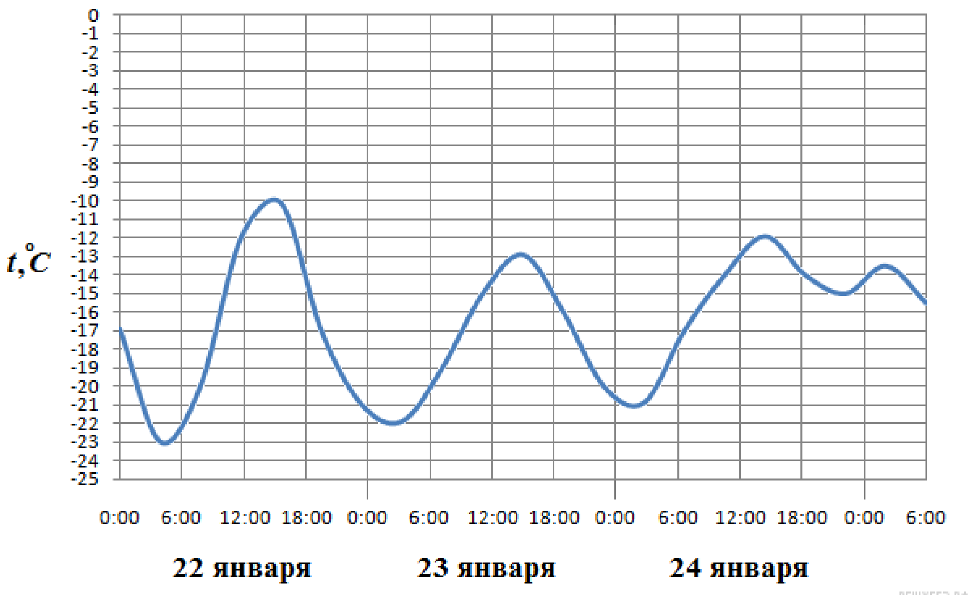
Решение.
С учетом наценки горшок станет стоить 120 + 0,2 · 120 = 144 рубля. Разделим 1000 на 144:

$$\frac{1000}{144}=\frac{125}{18}=\frac{108+17}{18}=\frac{108}{18}+\frac{17}{18}=6\frac{17}{18}.$$

Значит, можно будет купить 6 горшков.

Ответ: 6.

3. B 3 № 26868. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 22 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что наибольшая температура воздуха 22 января составляла −10 °С (см. рисунок).

Ответ: −10.

4. B 4 № 40319.
Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 40 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2550 рублей, щебень стоит 580 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 210 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешевый вариант?

Решение.

Рассмотрим все варианты.

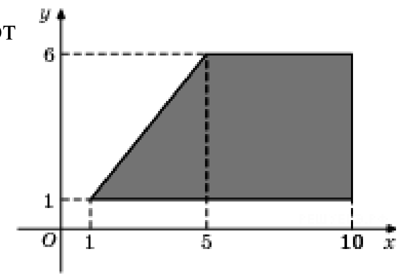
Стоимость фундамента из пеноблоков складывается из стоимости пеноблоков $4 \cdot 2550 = 10\,200$ руб., а также стоимости цемента $2 \cdot 210 = 420$ руб. Всего $420 + 10\,200 = 10\,620$ руб.

Стоимость бетонного фундамента складывается из стоимости цемента $40 \cdot 210 = 8400$ руб., а также стоимости щебня $4 \cdot 580 = 2320$ руб. Всего $8400 + 2320 = 10\,720$ руб.

Первый вариант дешевле второго.

Ответ: 10 620.

5. B 5 № 27573. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1;1), (10;1), (10;6), (5;6).



Решение.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Поэтому

$$S = \frac{5+9}{2} \cdot 5 = 35\,\text{см}^2.$$

Ответ: 35.

6. B 6 № 320208. В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж».

Решение.

В кармане было 4 конфета, а выпала одна конфета. Поэтому вероятность этого события равна одной четвертой.

Ответ: 0,25.

7. B 7 № 77373. Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0{,}2$.

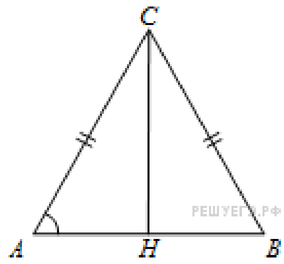
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0{,}2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{15-4x}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{15-4x} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 15-4x = 25 \Leftrightarrow x = -2{,}5.$$

Ответ: −2,5.

8. B 8 № 27295. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите высоту CH.

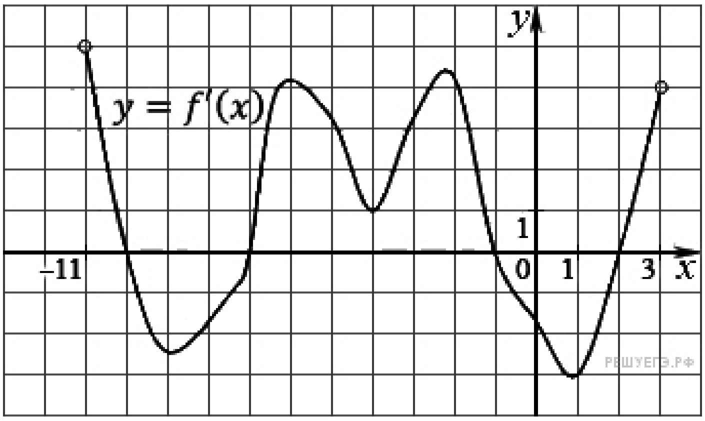


Решение.

$$CH = AC\sin A = AC\sqrt{1-\cos^2 A} = 5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = 5\cdot\frac{24}{25} = 4,8.$$

Ответ: 4,8.

9. B 9 № 27499. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (–11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

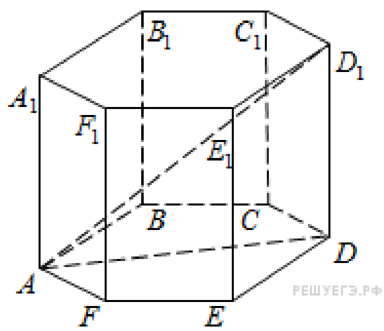


Решение.

Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам (–11; –10), (–7; –1), (2; 3). Наибольший из них — интервал (–7; –1), длина которого 6.

Ответ: 6.

10. B 13 № 245367. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла AD_1D.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ADD_1, катет которого является большей диагональю основания. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне: $AD = 2$. Поскольку $DD_1 = 1$ имеем:

$$\operatorname{tg}\angle AD_1D = \frac{AD}{DD_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ: 2.

11. B 11 № 316351. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}$.

Решение.

Заметим, что $\sqrt{4\cdot 15}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}=2\sqrt{15}$.

Поэтому

$$\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}=\left(\sqrt{15}-2\sqrt{15}\right)\cdot\sqrt{15}=-\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}=-15.$$

Ответ:–15.

12. B 12 № 317097. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Альфа», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,11.

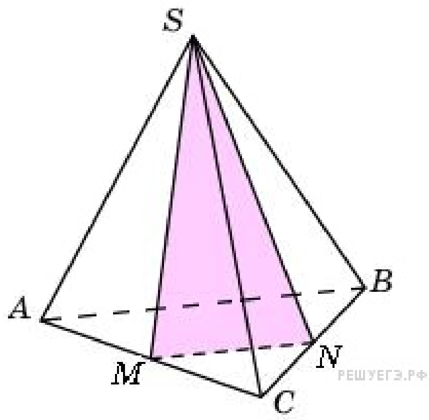
Решение.

Подставим значения в формулу:

$$R=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}}}=0,86-\frac{0,86-0,11}{(24+1)^{\frac{0{,}02\cdot 24}{0{,}86+0{,}1}}}=0,86-\frac{0,75}{25^{0,5}}=0,86-0,15=0,71.$$

Ответ:0,71.

13. B 10 № 27115. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



14. B 14 № 114653.

Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист, а через 10 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 2 минуты после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 3 минуты после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 5 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

До первой встречи велосипедист провел на трассе 1/5 часа, а мотоциклист 1/30 часа. Пусть скорость мотоциклиста равна v км/ч, тогда скорость велосипедиста равна

$$\frac{v}{\frac{1}{5}-\frac{1}{30}}=\frac{1}{6}v.$$

Еще через 1/20 часа после первой встречи, мотоциклист догнал велосипедиста во второй раз. Имеем:

$$v\cdot\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)=5+\frac{1}{6}v\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{12}v=5+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot v\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v\cdot\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)=5\Leftrightarrow v=120.$$

Таким образом, скорость мотоциклиста была равна 120 км/ч.

Ответ: 120.

Приведем арифметическое решение решение.

Заметим, что к моменту первой встречи мотоциклист за 2 минуты проехал столько же, сколько велосипедист за 12 минут. Следовательно, скорость мотоциклиста в 6 раз больше скорости велосипедиста. Это означает, что от момента первой встречи до момента второй мотоциклист, двигаясь по кругу, догоняет велосипедиста со скоростью сближения, равной пяти скоростям велосипедиста. При этом преодолевает разделяющее их расстояние 5 км за три минуты. Тогда скорость сближения составляет 1 км за три минуты или 20 км в час, а скорость мотоциклиста равна 120 км в час.

15. B 15 № 282862. Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$ на отрезке $[1;3]$.

Решение.

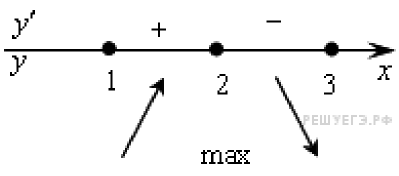
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x-2)^2)'(x-4)+(x-2)^2(x-4)'+(5)'=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)(3x-10).$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases}(x-2)(3x-10)=0,\\ 1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=3\frac{1}{3},\end{array}\right.\\ 1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\ x=2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=2$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(2)=(2-2)^2(2-4)+5=5.$$

Ответ: 5.

16. C 1 № 500063. а) Решите уравнение $4\cos^3 x+3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;-\pi]$.

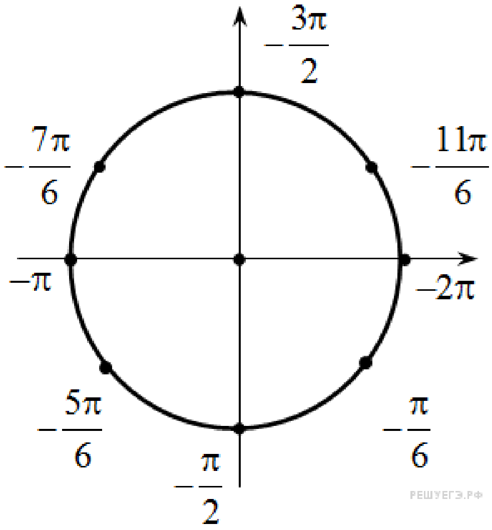
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуд а $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, при надлежащие отрезк у $[-2\pi; -\pi]$. Получим числа: $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.



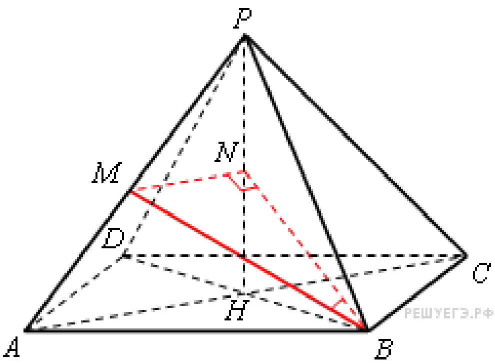
Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

17. C 2 № 484568. Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M — середина бо кового ребра пирамиды AP.

Решение.

Пусть отрезок PH — высота пирамиды $PABCD$, отрезок MN — средняя линия треугольник а APH (см. рисунок).

Поскольку $PABCD$ — правильная пирамида, точка H — центр квадрата $ABCD$, значит, $AH \perp BD$ и $AH \perp PH$, откуда $AH \perp BDP$. Но, $MN || AH$, следовательно, $MN \perp BDP$. Таким образом, прямая BN — про екция прямой BM на плоскость BDP, значит, угол между прямой BM и плоскостью BDP равен углу между прямой BM и прямой BN, то есть острому углу MBN прямоугольного треугольника MBN.



Примем длину ребра данной пирамиды за a, тогда медиана равностороннего треугольник а $MB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ и, следовательно $\sin\angle MBN = \frac{MN}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\angle MBN = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\angle MBN = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

18. C 3 № 501457. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x-3)\,|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ (x^2 - 7x + 6)\cdot\sqrt{11-x} \leq 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство $(x-3)\,|x-3|-|x-1| \geq 0$. При любом $x \leq 3$ неравенство не выполняется поскольку левая часть отрицательна. При $x>3$ неравенство равносильно неравенству $x^2-7x+10 \geq 0$, решением которого с учётом условия $x>3$ является луч $x \geq 5$.

Число 11 - решение второго неравенства, и при $x>11$ решений нет.

Пусть $x<11$. Тогда $\sqrt{11-x}>0$, и второе неравенство равносильно неравенству $x^2-7x+6 \leq 0$.

Решим систему: $\begin{cases} x<11, \\ x^2-7x+6 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<11, \\ 1 \leq x \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6.$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок $1 \leq x \leq 6$ и точка $x=11$.

Следовательно, решением данной системы являются отрезок $5 \leq x \leq 6$. и точка $x=11$.

Ответ: $[5;\ 6]$, 11.

19. C 4 № 500900. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN=11$, $MN=8$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.

Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P — точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ=x$.

Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ=\sqrt{QK^2-PK^2}.$$

Прямоугольные треугольник и QPK и QNM подобны, поэтому $\dfrac{PK}{PQ}=\dfrac{MN}{QN}$, откуда

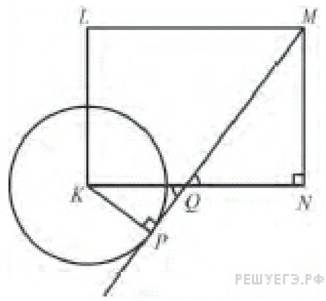


Рис.1

$$\frac{4}{\sqrt{x^2-16}}=\frac{8}{11-x} \Leftrightarrow (11-x)^2=4\left(x^2-16\right) \Leftrightarrow 3x^2+22x-185=0 \Rightarrow x=5.$$

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2-22x-185=0$, из которого $x=\dfrac{37}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{37}{3}$.

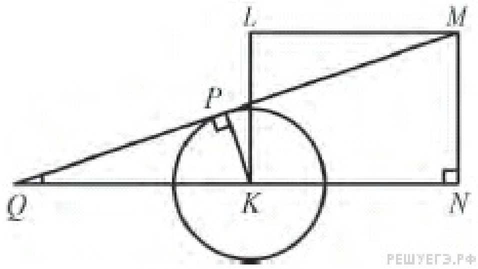


Рис.2

20. C 5 № 500216. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x}=a-3|x|$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = a - 3|x|$ и $g(x) = \sqrt{1-2x}$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$.

На промежутке $(-\infty; 0)$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $(-\infty; 0)$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f(0) > g(0)$, то есть при $a > 1$.

При $x \geq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $a - 3x = \sqrt{1-2x}$. При $x > \frac{a}{3}$ левая часть этого уравнения отрицательна, следовательно, решений нет. При $x \leq \frac{a}{3}$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $9x^2 + (2-6a)x + (a^2-1) = 0$, дискриминант которого $D = (2-6a)^2 - 36(a^2-1) = 40 - 24a$, поэтому при $a > \frac{5}{3}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{3}$ уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{4}{9}$; при $a < \frac{5}{3}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня,

$$x_1 = \frac{6a-2-\sqrt{D}}{18} = \frac{a}{3} - \frac{2+\sqrt{D}}{18} \text{ и } x_2 = \frac{6a-2+\sqrt{D}}{18} = \frac{a}{3} - \frac{2-\sqrt{D}}{18}.$$

Тогда меньший корень x_1 всегда меньше $\frac{a}{3}$, а больший корень x_2 не превосходит $\frac{a}{3}$, если $\sqrt{D} \leq 2$, то есть при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{6a-2}{9},\ x_1 x_2 = \frac{a^2-1}{9},$$

поэтому знаки корней x_1 и x_2 зависят от знаков выражений $\frac{6a-2}{9}$ и $\frac{a^2-1}{9}$. Значит, при $a < -1$ оба корня отрицательны, при $-1 \leq a < 1$ один из корней отрицательный, а другой неотрицательный, при $a \geq 1$ оба корня неотрицательны.

Таким образом, при $x \geq 0$ уравнение $a - 3x = \sqrt{1-2x}$ не имеет корней при $a < 1$ и $a > \frac{5}{3}$, имеет один корень при $1 \leq a < \frac{3}{2}$ и $a = \frac{5}{3}$, имеет два корня при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

Таким образом, уравнение $\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$ имеет следующее количество корней:

— нет корней при $a < 1$;
— один корень при $a = 1$ и $a > \frac{5}{3}$;
— два корня при $1 < a < \frac{3}{2}$ и $a = \frac{5}{3}$;

— три корня при $\frac{3}{2} \le a < \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2} \le a < \frac{5}{3}$.

21. C 6 № 484657. Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 399 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

Решение.

Разложим N на простые множители:

$$N = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} \dots p^{\alpha_p},$$

где p — наибольший простой множитель и $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$. Если запись числа N оканчивается n нулями, то или $\alpha_2 = n$, $\alpha_5 \ge n$, или, наоборот, $\alpha_2 \ge n$, $\alpha_5 = n$.

Оценим количество делителей k числа N :

$$k = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1) \dots (\alpha_p + 1) \ge (n+1)^2,$$

при этом k делится на $n+1$.

Первый случай. Если k — четное, то все делители разбиваются на $\frac{k}{2}$ пар вида $\left(d, \frac{N}{d}\right)$ так, что произведение делителей в каждой паре равно N. Поэтому произведение всех делителей равно $N^{\frac{k}{2}}$.

Второй случай. Если k — нечетное, то $k-1$ делителей разбиваются на пары указанного вида, и есть еще один делитель — $\sqrt{N}$. В этом случае тоже произведение всех делителей: $N^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sqrt{N} = N^{\frac{k}{2}}$.

Значит, для любого N произведение всех делителей оканчивается $\frac{nk}{2}$ нулями, следовательно, $nk = 2 \cdot 399 = 798$. При этом $798 = nk \ge n(n+1)^2$, откуда следует, что n — делитель числа 798, и $n \le 8$.

Выпишем все такие n : 1, 2, 3, 6, 7. Из равенства $798 = nk$ также следует, что 798 делится на $n+1$. Поэтому возможно только $n = 1, 2$ и $n = 6$. Для каждого из этих n подберем N. Ограничимся простыми множителями 2 и 5. Значит, нужно подобрать только α_2 и α_5.

1. $\alpha_2 = n = 1$, $k = 798$, $\alpha_5 = \frac{k}{n+1} - 1 = 398$, $N = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_5} = 2^1 \cdot 5^{398}$.
2. $\alpha_2 = n = 2$, $k = 399$, $\alpha_5 = 132$, $N = 2^2 \cdot 5^{132}$.
3. $\alpha_2 = n = 6$, $k = 133$, $\alpha_5 = 18$, $N = 2^6 \cdot 5^1 8$.

Таким образом, для $n = 1, 2, 6$ найдены (и даже не все) N, оканчивающиеся n нулями, произведение делителей которых оканчивается 399 нулями.

Ответ: 1, 2, 6.