Вариант № 2917720

1. B 1 № 77339. Каждый день во время конференции расходуется 70 пакетиков чая. Конференция длится 6 дней. Чай продается в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

Решение.

На 6 дней конференции расходуется $70 \cdot 6 = 420$ пакетиков чая. Разделим 420 на 50:

$$\frac{420}{50} = 8\frac{2}{5}.$$

Значит, на все дни конференции нужно купить 9 пачек чая.

Ответ: 9.

2. B 2 № 26620. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет ку пить на 750 рублей после понижения цены на 10%?

Решение.

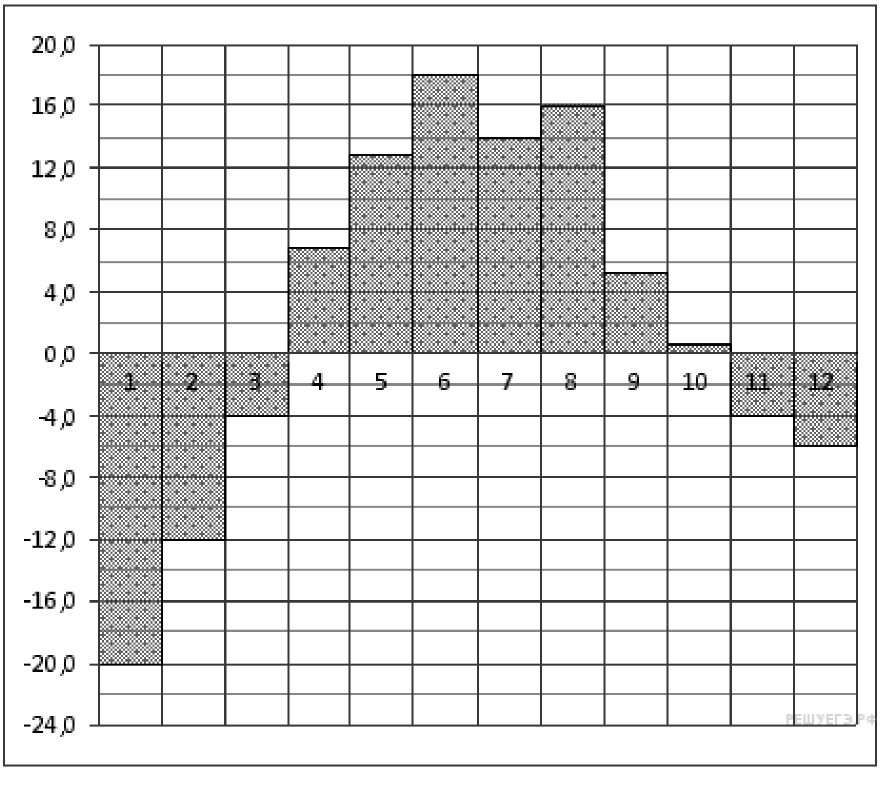
После понижения цены тетрадь станет стоить $40 - 0{,}1 \cdot 40 = 36$ рублей. Разделим 750 на 36:

$$\frac{750}{36} = \frac{125}{6} = \frac{120+5}{6} = \frac{120}{6} + \frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

Значит, можно будет купить 20 тетрадей.

Ответ: 20.

3. B 3 № 27518. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру во второй половине 1973 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из диаграммы видно, что наибольшая среднемесячная температура во второй половине года (то есть с 7 по 12 месяц) составляла 16 °C (см. рисунок).

Ответ: 16.

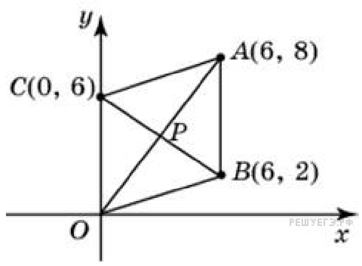
4. B 4 № 282833.
От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	**2**	**3**
Автобусом	От дома до автобусной станции — 5 мин.	Автобус в пути: 2 ч 5 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 30 мин.	Электричка в пути: 1 ч 40 мин.	От станции до дачи пешком 5 мин.
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 20 мин.	Маршрутное такси в дороге: 1 ч 30 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 35 мин.

Решение.
При поездке на автобусе потребуется времени 5 мин. + 2 ч. 5 мин. + 10 мин. = 2 ч. 20 мин.
При поездке электричкой потребуется времени 30 мин. + 1 ч. 40 мин. + 5 мин. = 2 ч. 15 мин.
При поездке маршрутным такси потребуется времени 20 мин. + 1 ч. 30 мин. + 35 мин. = 2 ч. 25 мин.
Тем самым, наименьшее время составляет 2 часа 15 минут, то есть два с четвертью часа — 2,25 часа.

Ответ: 2,25.

5. B 5 № 27676. Точки $O(0;, 0)$, $A(6; 8)$, $B(6; 2)$, $C(0; 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.



Решение.

$$BA=\sqrt{(6-6)^2+(8-2)^2}=6,$$

$$OC=\sqrt{(0-0)^2+(6-0)^2}=6,$$

$$OB=\sqrt{(6-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40},$$

$$CA=\sqrt{(6-0)^2+(8-6)^2}=\sqrt{40}.$$

Противоположные стороны попарно равны, четырехугольник является параллелограммом, значит, точка P является серединой отрезка CB. Поэтому координаты точки P вычисляются следующим образом:

$$x=\frac{6+0}{2}=3,\ y=\frac{6+2}{2}=4.$$

Ответ: 3.

6. B 6 № 282853. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Решение.
Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 8 очков, равно 5: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно 6·6 = 36. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков, равна

$$\frac{5}{36}=0,138...$$

Ответ: 0,14.

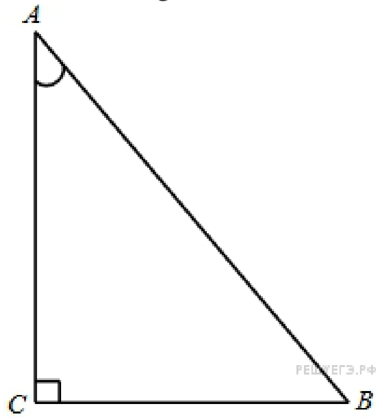
7. B 7 № 26670. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x}=512.$

Решение.
Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x}=512 \Leftrightarrow 8^{3-x}=8^3 \Leftrightarrow 3-x=3 \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

8. B 8 № 27252. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC=8$, $BC=4$. Найдите $\mathrm{tg}A$.

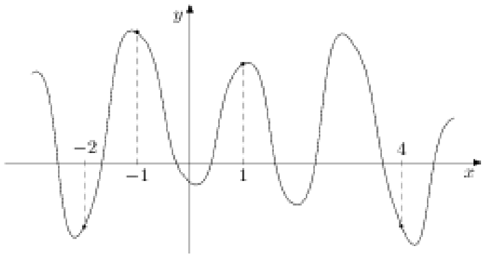


Решение.

$$tgA=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{8}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

9. B 9 № 317544. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



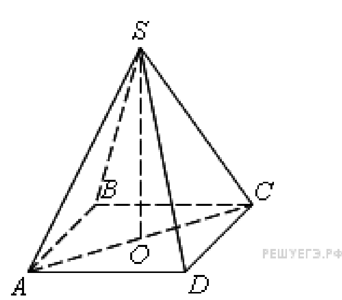
Решение.
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший.

Ответ:4.

10. B 13 № 284350. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO=4$, $SC=5$. Найдите длину отрезка AC.

Решение.
Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный: т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит и прямой AC. Тогда по теореме Пифагора

$$AC=2OC=2\sqrt{SC^2-SO^2}=2\sqrt{25-16}=6.$$



11. B 11 № 26896. Найдите значение выражения $\frac{\log_6\sqrt{13}}{\log_6 13}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_6\sqrt{13}}{\log_6 13}=\frac{\frac{1}{2}\log_6 13}{\log_6 13}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

12. B 12 № 42665. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 12 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 44 километров?

Решение.

Задача сводится к решению уравнений $l=12$ и $l=44$ при заданном значении R:

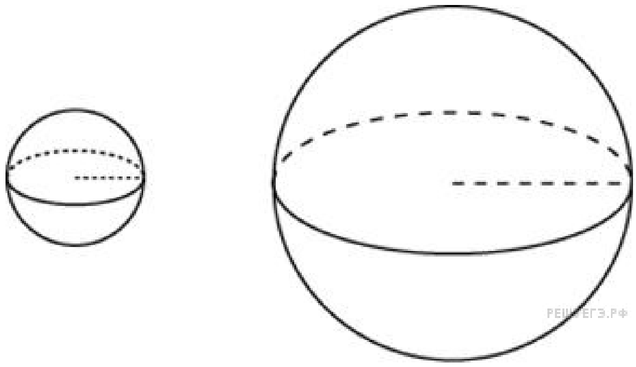
$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=12\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=12\Leftrightarrow\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{h}{5}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow h=\frac{45}{4}\Leftrightarrow h=11,25;$$

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=44\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=44\Leftrightarrow\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{11}{2}\Leftrightarrow\frac{h}{5}=\frac{121}{4}\Leftrightarrow h=\frac{605}{4}\Leftrightarrow h=151,25.$$

Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на 151,25 − 11,25 = 140 метров. Для этого ему необходимо подняться на 140 : 0,2 = 700 ступенек.

Ответ: 700.

13. B 10 № 27162. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



14. B 14 № 99583. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

Решение.

Пусть в первый день грузовик перевез $a_1=2$ тонны щебня, во второй — a_2, …, в последний — a_{14} тонн; всего было перевезено $S_n=210$ тонн; норма перевозки увеличивалась каждодневно на d тонн. Тогда

$$S_n=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}n\Leftrightarrow d=\frac{\frac{2S_n}{n}-2a_1}{n-1}.$$

Тогда за девятый день было перевезено

$$a_9=a_1+8d=a_1+8\cdot\frac{\left(\frac{2S_n}{n}-2a_1\right)}{n-1}=2+8\cdot\frac{30-4}{13}=18\text{ (тонн).}$$

Ответ: 18.

15. B 15 № 245178. Найдите точку минимума функции $y=\log_5(x^2-6x+12)+2$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y = \log_5 x$ возрастает, и за данная функция $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$ определена в точке 3, она также достигает в ней минимума.

Ответ: 3.

16. C 1 № 485935. Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$. Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $\cos x = y$, получим квадратное уравнение $6y^2 - 7y - 5 = 0$, корнями которого являются числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{3}$. Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим искомые корни:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$. Решим неравенства:

$$-\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq n \leq 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow n = 0 \text{ или } n = 1;$$

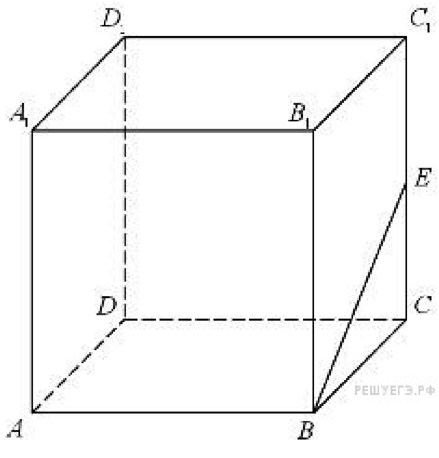
$$-\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни: $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$. Заданному отрезку принадлежат корни $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

17. C 2 № 500112. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между пря мыми BE и AD.

Решение.



Примем ребро куба за единицу. Тогда $CE = \frac{1}{2}$.

Прямая AD параллельна прямой BC, значит, искомый угол равен углу CBE.

Из прямоугольного треугольника CBE с прямым углом C имеем:

$$\operatorname{tg} \angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2},$$

тогда

$$\angle CBE = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Ответ также может быть представлен в следующем виде: $\angle CBE = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ или $\angle CBE = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

18. C 3 № 484585. Решите неравенство: $\dfrac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0,1x)} \geq \dfrac{\left(4\cdot 2^{\lg(10x)}\right)^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0,1x)}$.

Решение.

Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \Leftrightarrow \frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{(1+\lg x)}\cdot 2^{\lg x^2+3\lg x+2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}.$$

Разделив обе части на $2^{1+\lg x}$ и сократив левую часть на 7, а правую на 4, получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \Leftrightarrow \frac{7^{\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{\log_2 7\cdot\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0.$$

Сделаем замену: $y=\lg x$, тогда получим

$$\frac{2^{y\log_2 7}-2^{y^2+3y}}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0,$$

откуда

$$\frac{y\cdot\log_2 7-(y^2+3y)}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-(\log_2 7-3))}{(y+2)^2(y-1)} \leq 0.$$

Решим полученное рациональное неравенство:

$$y\in(-\infty,\,-2)\cup(-2,\,\log_2 7-3]\cup[0,\,1).$$

Тогда

$$x\in\left(0,\,\frac{1}{100}\right)\cup\left(\frac{1}{100},\,10^{\log_2 7-3}\right]\cup[1,\,10).$$

Ответ: $x\in\left(0,\,\dfrac{1}{100}\right)\cup\left(\dfrac{1}{100},\,10^{\log_2 7-3}\right]\cup[1,\,10)$.

19. C 4 № 500021. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 7,5, а полусумма оснований равна 17,5, поэтому основания трапеции равны 10 и 25.

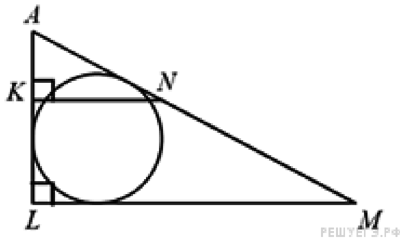


Рис. 1

Предположим что $LM=25,\ KN=10$ (рис. 1). Стороны LM и KN треугольников ALM и AKN параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k=\frac{2}{5}$. Значит,

$$AL=\frac{KL}{1-k}=\frac{40}{3},\ AM=\frac{MN}{1-k}=\frac{85}{3}.$$

Заметим, что $AL^2+LM^2=AM^2$, поэтому треугольник ALM — прямоугольный с гипотенузой AM. (Поэтому трапеция прямоугольная, как и изображено на рисунке.) Радиус вписанной в треугольник ALM окружности равен $r=\frac{AL+LM-AM}{2}=5$.

Пусть теперь $KN=25, LM=10$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника AKN равен 5. Треугольник AKN и ALM подобны с коэффициентом $k=\frac{2}{5}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника ALM равен $r=5k=2$.

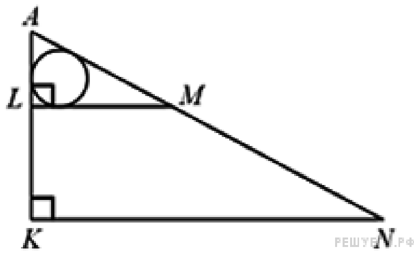


Рис. 2

Ответ: 2; 5.

20. C 5 № 501048. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2}-a\cdot 2^{1-x^2}+a}{2^{1-x^2}-1}=3$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Сделаем замену $z=2^{-x^2}$, $x^2\geq 0$, поэтому $0<z\leq 1$. Задачу можно сформулировать так: найдите значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{z^2-2az+a}{2z-1}=3$ имеет хотя бы одно решение, удовлтеворяющее условию $0<z\leq 1$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} z^2-2az+a=6z-3, \\ z\neq 0,5, \\ 0<z\leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-2(a+3)z+a+3=0, \\ z\neq 0,5, \\ 0<z\leq 1. \end{cases}$$

Заметим что ни при одном значении a число $z=0,5$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим функцию $f(z)=z^2-2(a+3)z+a+3$. Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трёхчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке (0; 1])(см.рис. 1), то есть $\begin{cases} f(0)<0, \\ f(1)\geq 0. \end{cases}$

2) Трёхчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке (0; 1])(см.рис. 2), то есть $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)\leq 0. \end{cases}$

3) Трёхчлен имеет два корня,возможно, совпадающих, и оба лежат на промежутке (0; 1])(см.рис. 3), то есть $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)\geq 0, \\ f(z_0)\leq 0. \end{cases}$ где z_0 — абсцисса вершины параболы.

Эти условия соответствуют следующим способам расположения графика функции $f(z)$:

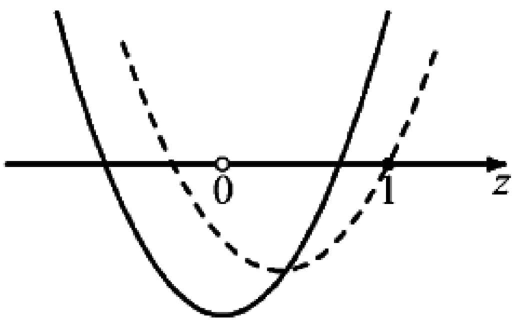


Рис. 1

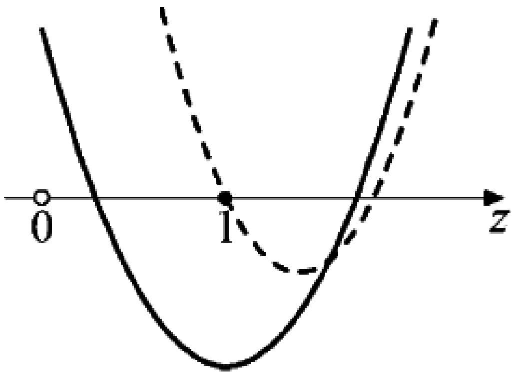


Рис. 2

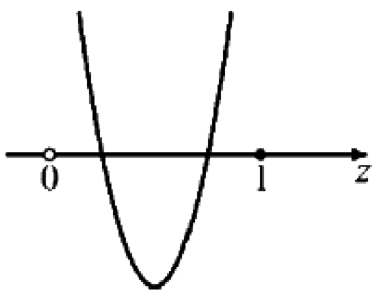


Рис. 3

Решим систему 1: $\begin{cases} a+3<0, \\ 1-a-3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-3, \\ a\leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow a<-3.$

Решим систему 2: $\begin{cases} a+3>0, \\ 1-a-3\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-3, \\ a\geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow a\geq -2.$

Решим систему 3: $\begin{cases} a+3>0, \\ 1-a-3\geq 0, \\ (a+3)^2-2(a+3)+a+3\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-3, \\ a\leq -2, \\ a\geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow a=-2.$

Ответ: $a<-3, a\geq -2$.

21. C 6 № 501694. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет за писан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из за думанных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 8 - 10 = 16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в усло вии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.