Вариант № 2917721

1. B 1 № 26617. Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение.

Всего на теплоходе 775 человек. Разделим 775 на 70:

$$\frac{775}{70} = \frac{770+5}{70} = \frac{770}{70} + \frac{5}{70} = 11\frac{1}{14}.$$

Значит, на судне должно быть 12 шлюпок.

Ответ: 12.

2. B 2 № 26628. Железнодорожный билет для взрослого стоит 720 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 15 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

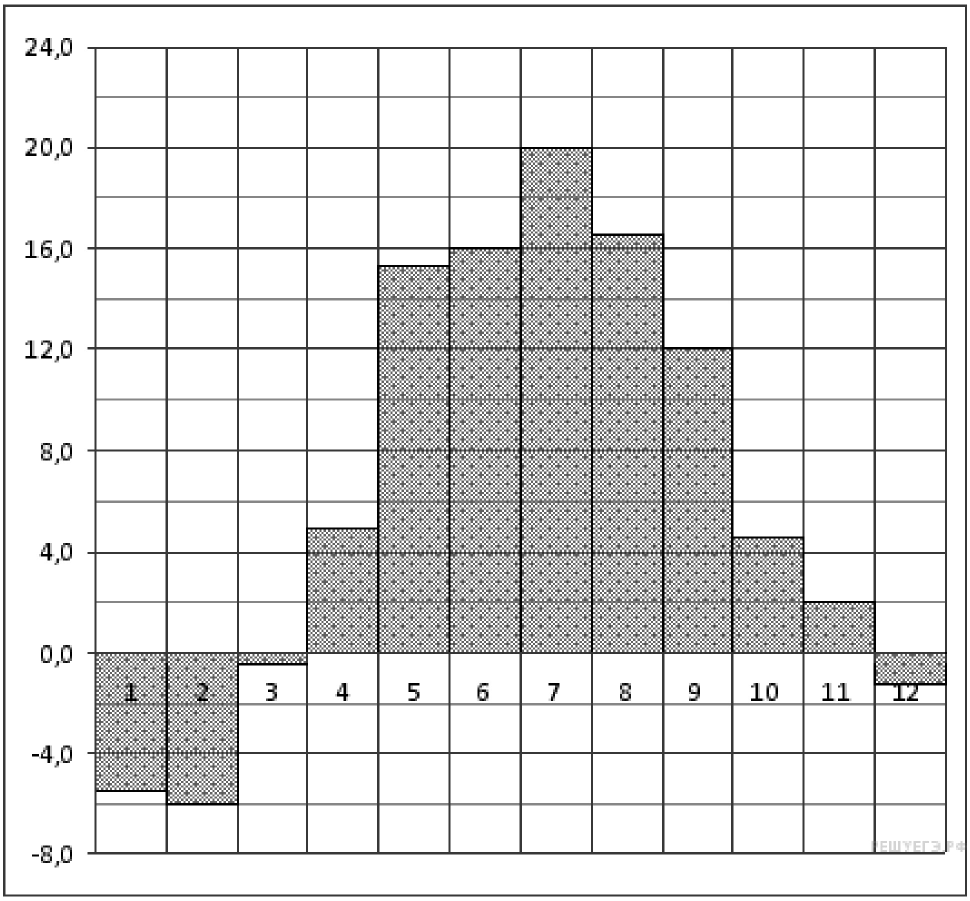
Решение.

Билет для ребенка стоит $720 \cdot 0{,}5 = 360$ руб. Стоимость билетов на 15 школьников и двух взрослых составляет

$360 \cdot 15 + 720 \cdot 2 = 5400 + 1440 = 6840$ руб.

Ответ: 6840.

3. B 3 № 27520. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура была отрицательной.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 4 месяца с температурой ниже нуля (см. рисунок).

Ответ: 4.

4. B 4 № 5453.

Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 930 рублей. Автомобиль расходует 11 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18,5 рублей за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

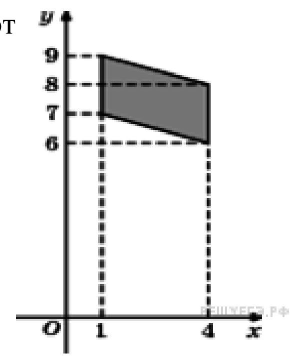
Решение.

Стоимость поездки на поезде для троих человек будет составлять $930 \cdot 3 = 2790$ руб. Расход бензина на 700 км пути составит 7 раз по 11 литров т. е. 77 литров. Его стоимость $77 \cdot 18{,}5 = 1424{,}5$ руб.

Стоимость самой дешевой поездки составляет 1424,5 рубля.

Ответ: 1424,5.

5. B 5 № 27579. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (4;6), (4;8), (1;9).

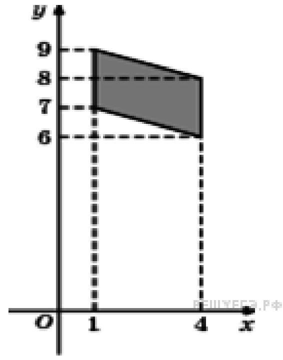


Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту. Поэтому

$$S=(9-7)\cdot(4-1)=6.$$

Ответ: 6.



6. B 6 № 320181. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А. хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А. пойдёт в магазин?

Решение.

Всего туристов пять, случайным образом из них выбирают двоих. Вероятность быть выбранным равна 2 : 5 = 0,4.

Ответ: 0,4.

7. B 7 № 101879.

Решите уравнение $\frac{x-6}{7x+3}=\frac{x-6}{5x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

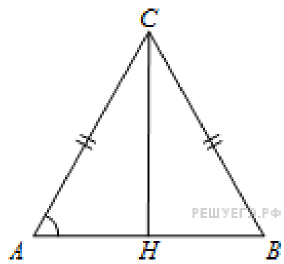
Решение.

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x-6}{7x+3}=\frac{x-6}{5x-1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-6=0;\\7x+3=5x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6;\\x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: 6.

8. B 8 № 27309. В треугольнике ABC $AC=BC=25$, высота CH равна 20. Найдите $\cos A$.



Решение.

$$\cos A=\frac{AH}{AC}=\frac{\sqrt{AC^2-CH^2}}{AC}=\frac{\sqrt{625-400}}{25}=\frac{15}{25}=0,6.$$

Ответ: 0,6.

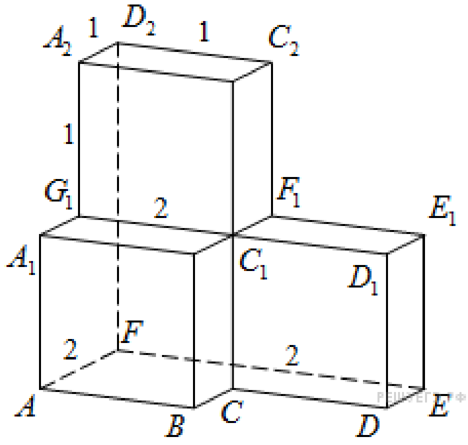
Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 2t - 13$ м/с. Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение:

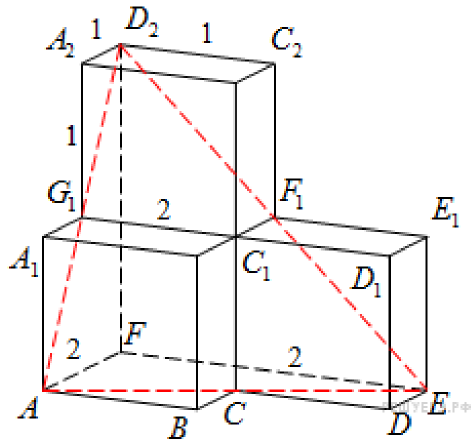
$$2t - 13 = 3 \Leftrightarrow 2t = 16 \Leftrightarrow t = 8 \text{ с.}$$

Ответ: 8.

10. B 10 № 245384. Найдите угол EAD_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.



Решение.
Рассмотрим треугольник EAD_2. В нем $AE = ED_2 = D_2A$, т. к. это диагонали равных квадратов. Таким образом, треугольник EAD_2 — равносторонний, все его углы равны $60°$.
Ответ: 60.



11. B 11 № 26843. Найдите значение выражения $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$.
Решение.
Выполним преобразования:

$$(\log_2 16) \cdot (\log_6 36) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: 8.

12. B 12 № 27972. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в Омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в Омах.)

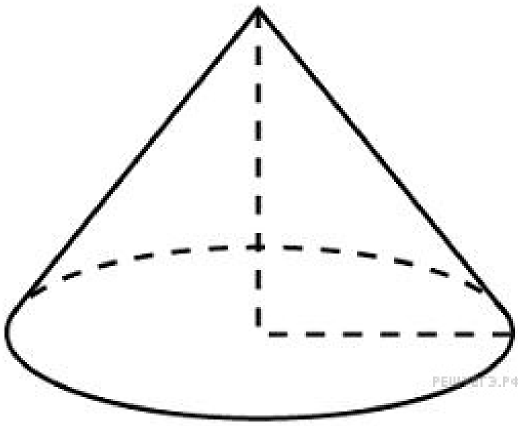
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $I \le 0{,}2 I_{\text{кз}}$ при известном значении внутреннего сопротивления $r = 1$ Ом:

$$I \le 0{,}2 I_{\text{кз}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{R+1} \le 0{,}2 \cdot \frac{\varepsilon}{1} \Leftrightarrow R + 1 \ge 5 \Leftrightarrow R \ge 4 \text{ Ом.}$$

Ответ: 4.

13. B 10 № 27136. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 3 раза?



14. B 14 № 99566. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Решение.

Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в понедельник акции компании подорожали на $c\cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1+c\cdot 1$. Во вторник акции подешевели на $c\cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1+c-c(1+c)$. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник, то есть 0,96. Таким образом,

$$1+c-c(1+c)=0,96 \Leftrightarrow 1-c^2=0,96 \Leftrightarrow c^2=0,04 \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c=0,2.$$

Ответ: 20.

15. B 15 № 26726. Найдите точку максимума функции $y=(x-2)^2e^{x-6}$.

Решение.

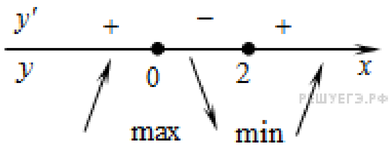
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x-2)^2)'e^{x-6}+(x-2)^2(e^{x-6})'=2(x-2)e^{x-6}+(x-2)^2e^{x-6}=$$
$$=x(x-2)e^{x-6}.$$

Найдем нули производной:

$$x(x-2)e^{x-6}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=0$.

Ответ: 0.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$1-2\sin^2 x+3\sin^2 x=1,25 \Leftrightarrow 1+\sin^2 x=1,25$$

В результате получим:

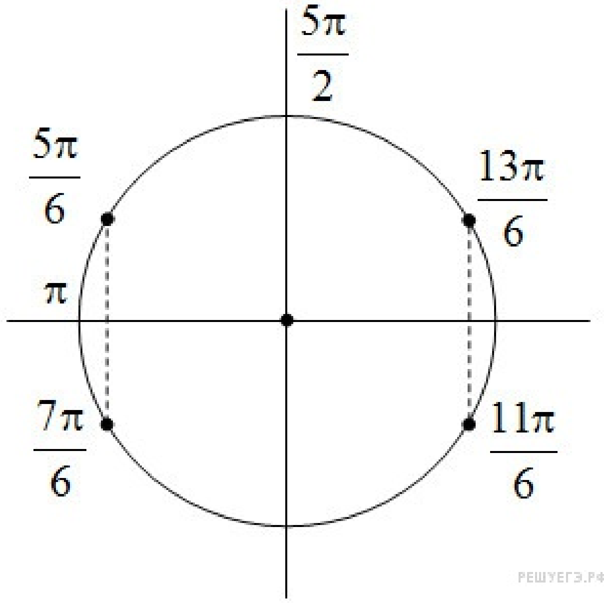
$$\sin^2 x=0,25 \Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}$$

Значит

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности.



Отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.

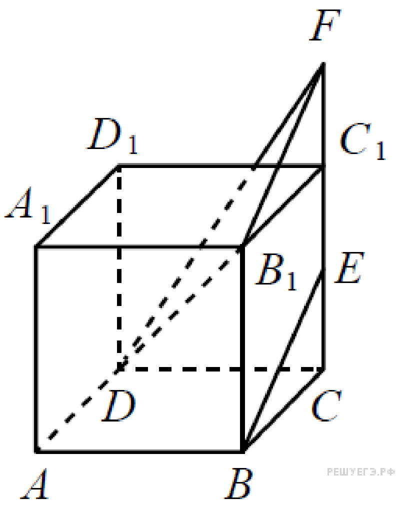
Ответ:

А) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Б) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.

17. C 2 № 500408. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и B_1D.

Решение.



Примем ребро куба за a. Тогда $DB_1=\sqrt{3}a$ Проведём через точку B_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает продолжение ребра CC_1 в точке F, причём $C_1F=\frac{1}{2}a$. Искомый угол равен углу DB_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике B_1C_1F с прямым углом C_1

$$B_1F=\sqrt{B_1C_1^2+C_1F^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

В прямоугольном треугольнике DCF с прямым углом C

$$DF=\sqrt{DC^2+CF^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}a.$$

В треугольнике DB_1F по теореме косинусов

$$DF^2=DB_1^2+B_1F^2-2\cdot\cos\angle DB_1F\cdot DB_1\cdot B_1F,$$

откуда $\cos\angle DB_1F=\frac{DB_1^2+B_1F^2-DF^2}{2\cdot DB_1\cdot B_1F}=\frac{\sqrt{15}}{15}$, а тогда $\angle DB_1F=\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Примечание.

Ответ может быть представлен и в другом виде:

$$\angle DB_1F=\arcsin\frac{\sqrt{210}}{15}=\operatorname{arctg}\sqrt{14}.$$

18. C 3 № 501731. Решите систему неравенств $\begin{cases}\log_{4-x}(16-x^2)\le 1,\\ 2x+1-\frac{21x+39}{x^2+x-2}\ge-\frac{1}{x+2}.\end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}(16-x^2)\le 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{4-x}(4-x)(4+x)\le 1 \Leftrightarrow\; \log_{4-x}(4+x)\le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+4)\le 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ x<3,\end{cases} \text{откуда } 3<x<4.$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+4)\le 0,\\ 4-x>1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ x<3,\end{cases} \text{откуда } -4<x\le -3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4<x\le -3;\; 3<x<4.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$2x+1-\frac{21x+39}{x^2+x-2}\ge -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x+1-\frac{20(x+2)}{(x+2)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}\ge -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x+1-\frac{20}{x-1}\ge 0, \text{где } x\ne -2;\; \frac{(x+3)(2x-7)}{x-1}, \text{где } x\ne -2.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $-3\le x<-2;\; -2<x<1;\; x\ge \frac{7}{2}.$

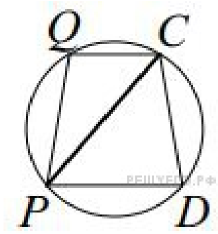
3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3;\; x=0;\; \frac{7}{2}\le x<4.$

Ответ: $-3;\; \left[\frac{7}{2};4\right).$

19. C 4 № 502077. В окружности проведены хорды PQ и CD, причём $PQ = PD = CD = 8$, $CQ = 6$. Найдите CP.

Решение.

Возможны два случая. Первый случай: точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1), тогда ∠PQC = 180° − ∠PDC.



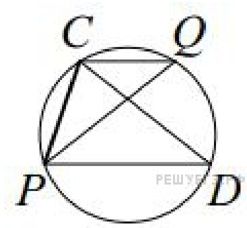
В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 100 + 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 128 - 128 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \dfrac{1}{8};\ PC = 4\sqrt{7}.$

Второй случай: точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP (рис. 2), тогда $\angle PQC = \angle PDC$.



В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 100 - 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 128 - 128 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \dfrac{7}{8};\ PC = 4.$

Ответ: 4 или $4\sqrt{7}$.

20. C 5 № 500016. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x+a)^2-2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};\ -2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x=-\frac{a}{2}$.

На множестве $|x|\ \geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=-\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В част ности,

$$f(1)\geq 6;\ a^2+2a+6\geq 6;\ a(a+2)\geq 0,$$

$f(-1)\geq 6;\ a^2-6a+6\geq 6;\ a(a-6)\geq 0,$
откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a+2)\geq 0, \\ a(a-6)\geq 0, \end{cases}$$

решениями которой являются $a\leq -2;\ a=0;\ a\geq 6$.

При $a\leq -2$ имеем: $-\frac{a}{2}\geq 1$, значит наименьшее значение функции достигается в точке $x=-\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\geq 6$, что удовлетворяет условию задачи.

При $a=0$ имеем: $-\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a\geq 6$ имеем: $-\frac{a}{2}\leq -3$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=-\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\leq -10$, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\leq -2;\ a=0$.

21. C 6 № 484663. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Решение.

Если число p является делителем числа k^3+9k, то оно является также и делителем числа $k(k^3+9k)=k^4+9k^2$. Но если число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^4+9k^2, то оно является также и делителем разности этих чисел, то есть числа

$$(k^4+12k^2+12)-(k^4-9k^2)=3k^2+12.$$

Аналогично получаем:

1) число p является общим делителем чисел k^3+9k и $3k^2+12$, значит, p является делителем числа

$$3(k^3+9k)-k(3k^2+12)=15k;$$

2) число p является общим делителем чисел $3k^2+12$ и $15k$, значит, p является делителем числа

$$5(3k^2+12)-k15k=60;$$

Число 60 имеет ровно три различных простых делителя — 2, 3 и 5. Остается проверить найдутся ли такие целые числа k для каждого из которых одно из чисел 2, 3 и 5 является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Если число k — четное, то число 2 является общим делителем данных чисел. Если число k кратно 3, то число 3 является общим делителем данных чисел. Если число $k=1$, то число 5 является общим делителем данных чисел.

Ответ: 2, 3, 5.