Вариант № 2917722

1. B 1 № 26636. Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она получит с 500 рублей?

Решение.

Найдем стоимость покупки: 1 кг 200 г клубники стоит $1{,}2 \cdot 80 = 96$ рублей. Значит, с 500 рублей мама получит сдачи $500 - 96 = 404$ рубля.

Ответ: 404.

2. B 2 № 77355. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

Решение.

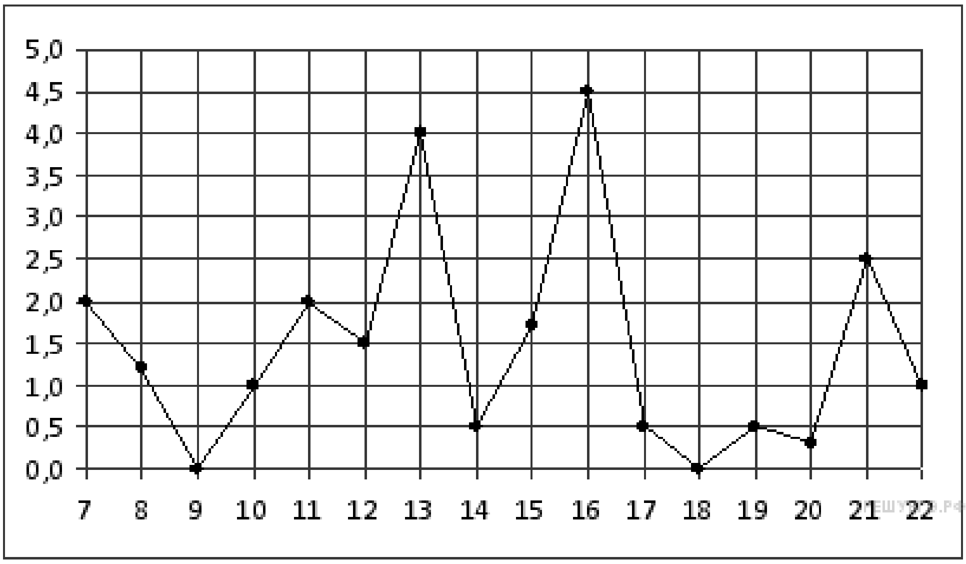
Налог составит $700 \cdot 0{,}13 = 91$ рубль. После выплаты налога останется $700 - 91 = 609$ рублей. Разделим 609 на 60:

$$\frac{609}{60} = 10\frac{9}{60} = 10\frac{3}{20}.$$

Значит, денег хватает на 10 тюльпанов. В букете должно быть нечетное число цветов, поэтому сту дент купит 9 тюльпанов.

Ответ: 9.

3. B 3 № 27527. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало менее 3 миллиметров осадков.



Решение.

Из 16 наблюдений, представленных на графике, 2 дня выпадало более 3 мм осадков. Поэтому 14 дней выпадало менее 3 мм осадков.

Ответ: 14.

4. B 4 № 26689. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 9 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 50 мешков цемента. Тонна камня стоит 1 600 рублей, щебень стоит 780 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 230 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

Решение.

Рассмотрим два варианта.

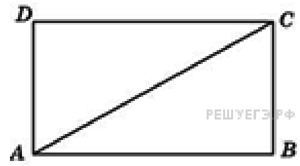
Стоимость каменного фундамента складывается из стоимости камня $9 \cdot 1600 = 14\,400$ руб., а также стоимости цемента $9 \cdot 230 = 2070$ руб. и составляет $2070 + 14\,400 = 16\,470$ руб.

Стоимость бетонного фундамента складывается из стоимости цемента $50 \cdot 230 = 11\,500$ руб., а также стоимости щебня $7 \cdot 780 = 5460$ руб. и составляет $5460 + 11\,500 = 16\,960$ руб.

Стоимость самого дешевого варианта составляет 16 470 рублей.

Ответ: 16 470.

5. B 5 № 27811. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.



Решение.

по теореме Пифагора диагональ равна $\sqrt{6^2+8^2}=10.$

Ответ: 10.

6. B 6 № 320179. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?

Решение.

Натуральных чисел от 10 до 19 десять, из них на три делятся три числа: 12, 15, 18. Следовательно, искомая вероятность равна 3:10 = 0,3.

Ответ: 0,3.

7. B 7 № 10149. Найдите корень уравнения: $\frac{8}{9}x=18\frac{2}{3}.$

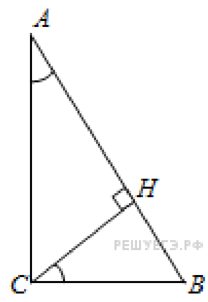
Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{8}{9}x=18\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{56}{3}\cdot\frac{9}{8} \Leftrightarrow x=21.$$

Ответ: 21.

8. B 8 № 27282. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AC=7$, $\operatorname{tg} A=\frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AH.



Решение.

$$AH = AC\cos A = AC\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A}} = 7\sqrt{\frac{1}{1+\frac{33}{16}}} = 7\sqrt{\frac{16}{49}} = 4.$$

Ответ: 4.

9. B 9 № 119973. Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $28x^2+bx+15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.
Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x+b=-5, \\ 28x^2+bx+15=-5x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5-56x, \\ 28x^2+(-5-56x)x+15=-5x+8 \end{cases} \begin{cases} b=-5-56x, \\ x^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому x=0,5, откуда b=–33.

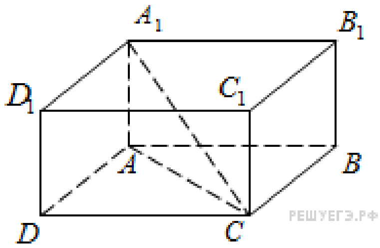
Ответ: –33.

10. B 10 № 284363. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DD_1=1$, $CD=2$, $AD=2$. Найдите длину диагонали CA_1

Решение.
Найдем диагональ AC прямоугольника $ABCD$. По теореме Пифагора

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{8}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1AC. По теореме Пифагора



$$CA_1=\sqrt{CA^2+AA_1{}^2}=\sqrt{8+1}=3.$$

Ответ: 3.

11. B 11 № 77391. Найдите значение выражения $4\frac{4}{9}:\frac{4}{9}$.

Решение.
Выполним преобразования:

$$4\frac{4}{9}:\frac{4}{9}=\frac{40}{9}\cdot\frac{9}{4}=10.$$

Ответ: 10.

12. B 12 № 28014. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t)=5\sin\pi t$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

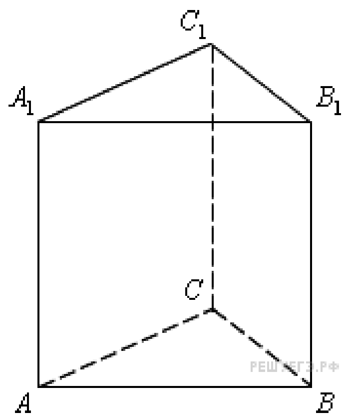
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $v \geq 2,5$ см/с при заданном законе изменения скорости $v(t) = 5\sin\pi t$:

$$5\sin\pi t \geq 2,5 \Leftrightarrow \sin\pi t \geq \frac{1}{2} \underset{0<\pi t<\pi}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{6} \leq \pi t \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}.$$

Таким образом, $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0,666...$ первой секунды после начала движения скорость груза превышала 2,5 см/с. Округляя, получаем 0,67.
Ответ: 0,67.

13. B 10 № 245342. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, B, C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



14. B 14 № 503125. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 8 км. Пешеход прошёл путь из A в B за 2 часа 45 минут. Время его движения на спуске составило 1 час 15 минут. С какой скоростью пешеход шёл на спуске, если скорость его движения на подъёме меньше скорости движения на спуске на 2 км/ч? Ответ выразите в км/ч.

Решение.

Заметим, что время подъема составило 1 час 30 минут или 1,5 часа, а время спуска 1,25 часа. Пусть x км/ч — скорость движения пешехода на спуске, тогда $x - 2$ км/ч — скорость движения пешехода на подъеме, $1,25x$ км — длина пути на спуске, $1,5(x - 2)$ км — длина пути на подъеме. Всего было пройдено 8 км, откуда имеем:

$$1,25x + 1,5(x-2) = 8 \Leftrightarrow 5x + 6(x-2) = 32 \Leftrightarrow 11x = 44 \Leftrightarrow x = 4.$$

Тем самым, скорость пешехода на спуске была равна 4 км/ч.

Ответ: 4.

15. B 15 № 282860. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$.

Решение.

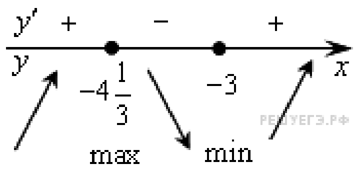
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x+3)^2)'(x+5)+(x+3)^2(x+5)'-(1)'=$$
$$=2(x+3)(x+5)+(x+3)^2=(x+3)\cdot(2(x+5)+(x+3))=(x+3)(3x+13).$$

Найдем нули производной:

$$(x+3)(3x+13)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=-4\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-3$.

Ответ: −3.

16. C 1 № 500637. а) Решите уравнение $7\operatorname{tg}^2x-\dfrac{1}{\cos x}+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right].$

Решение.

а) Решим уравнение

$$7\operatorname{tg}^2x-\frac{1}{\cos x}+1=0\Leftrightarrow 7\cdot\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}-\frac{1}{\cos x}+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\cos^2x+\cos x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1;\\ \cos x=-\dfrac{7}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow\ x=2\pi k,k\in\mathbb{Z}.$$

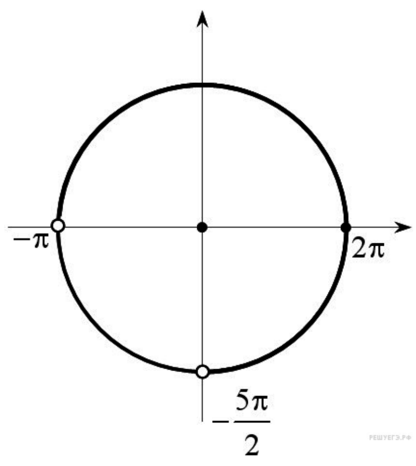
б) Найдем корни, лежащие в заданном отрезке, решая двойное неравенство:

$$-\frac{5\pi}{2}\le 2\pi k\le-\pi\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le k\le-\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-1.$$

Тогда искомый корень -2π.

Примечание.

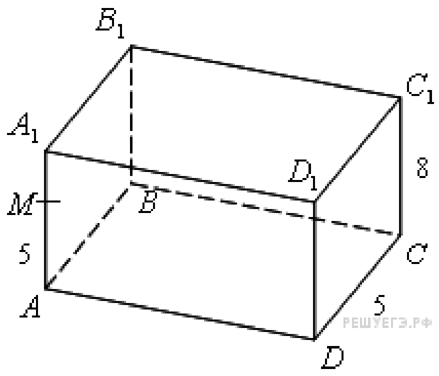
Отобрать корни можно, используя тригонометрическую окружность (см. рис.).



Ответ: а) $2\pi k,k\in\mathbb{Z}$; б) -2π.

17. C 2 № 484558. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD=12,AB=5,AA_1=8$. Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1, причем $AM=5$.

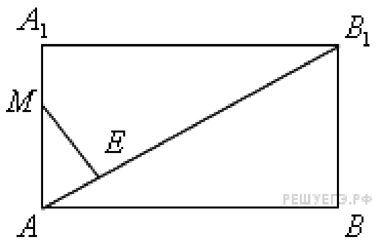
Решение.



Заметим, что $V_{MB_1C_1D} = \dfrac{1}{3} S_{B_1C_1D} \cdot h_M$. Площадь прямоугольного треугольника, лежащего в основании, равна половине произведения катетов: $S_{B_1C_1D} = 6\sqrt{89}$.

Основание пирамиды лежит в плоскости AB_1C_1D, поэтому высотой пирамиды будет являться перпендикуляр, опущенный из точки M на эту плоскость. Опустим перпендикуляр ME на прямую AB_1. Поскольку $ME \perp AB_1$ и $ME \perp AD$, в силу того, что $(AD) \perp (AA_1B_1B)$, отрезок ME является высотой пирамиды: $ME = h_M$.

Треугольник AME подобен треугольнику ABB_1, значит,



$$ME = \frac{AM \cdot AB}{AB_1} = \frac{25}{\sqrt{89}},$$

$$V_{MB_1C_1D} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{89} \cdot \frac{25}{\sqrt{89}} = 50.$$

Ответ: 50.

18. С 3 № 503254. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x-12} + \dfrac{2x^2-6x+1}{x-3} \geq 2x, \\ \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \dfrac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\frac{1}{5x-12}+\frac{2x^2-6x+1}{x-3}\geq 2x \Leftrightarrow \frac{1}{5x-12}+\frac{2x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}\geq 2x \Leftrightarrow \frac{2x-5}{(5x-12)(x-3)}\geq 0.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $\frac{12}{5}<x\leq\frac{5}{2};\ x>3.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\leq -2 \Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{(2x+7)(x+1)}{(x+1)^4}\leq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7)\cdot(\log_{x+1}(2x+7)-3)\leq -2.$$

Пусть $t=\log_{x+1}(2x+7)$, тогда неравенство примет вид: $t(t-3)\leq -2;\ \ t^2-3t+2\leq 0$, откуда

$$1\leq t\leq 2;\ 1\leq \log_{x+1}(2x+7)\leq 2.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<x+1<1$.

$$\log_{x+1}(2x+7)\geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7\leq x+1, \\ 2x+7>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -6, \\ x>-\frac{7}{2}; \end{cases} \text{нет решений.}$$

В этом случае второе неравенство исходной системы не имеет решений.
Второй случай: $x+1>1$.

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x+7)\geq 1, \\ \log_{x+1}(2x+7)\leq 2, \\ x+1>1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7\geq x+1, \\ 2x+7\leq (x+1)^2, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -6, \\ x^2-6\geq 0, \\ x>0, \end{cases} \text{откуда } x\geq\sqrt{6}.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\geq\sqrt{6}$.

3. Поскольку $\frac{12}{5}<\sqrt{6}<\frac{5}{2}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\sqrt{6}\leq x\leq\frac{5}{2};\ x>3.$

Ответ: $\left[\sqrt{6};\ \frac{5}{2}\right];\ (3;\ +\infty)$

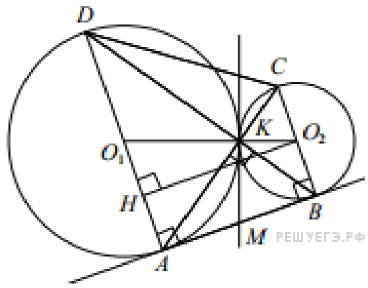
19. C 4 № 501887. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается пер вой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.

Задание а). Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и. $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.



Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

Задание б). Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DK}{KB} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \dfrac{DK}{KB} = \dfrac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

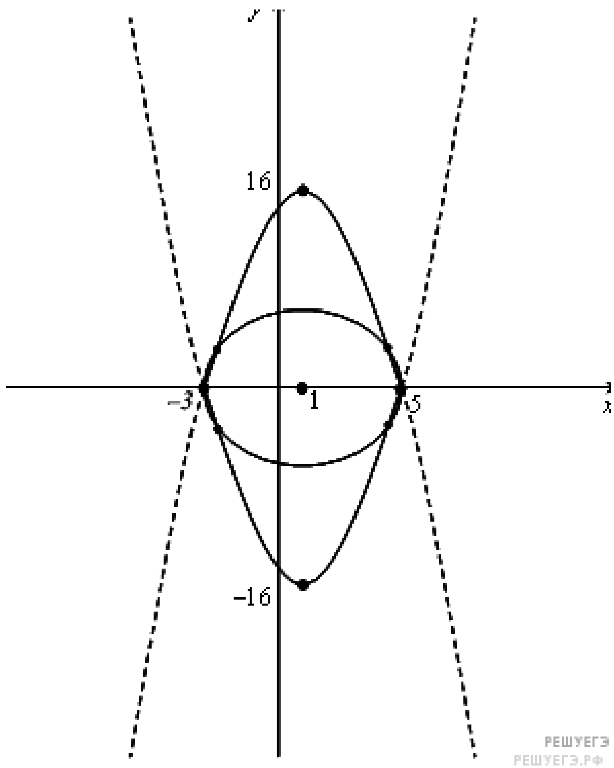
Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

20. C 5 № 484646. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 - 2x + |y| - 15 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$
имеет ровно 6 решений.

Решение.

Преобразуем систему: $\begin{cases} (x-1)^2 + |y| = 16, \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$



Первое уравнение задает части двух парабол: $y = \begin{cases} 16 - (x-1)^2, & y \geq 0, \\ (x-1)^2 - 16, & y < 0. \end{cases}$ (см. рисунок).

Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(1, 0)$. На рисунке видно, что шесть решений системы получаются, только если окружность проходит через точки $(-3, 0)$ и $(5,\ 0)$, пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 4, откуда $a = -4$ или $a = 4$.

Ответ: $-4, 4$.

21. C 6 № 500966. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел:

$$-11,\ 12,\ 13,\ -14,\ -15,\ 17,\ -18,\ 19.$$

Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел:

$$-11,\ 12,\ 13,\ -14,\ -15,\ 17,\ -18,\ 19.$$

После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться 0.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 117.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому все произведение делится на 4. Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, – это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках:

$$(-11;\ 12),\ (12;\ -11),\ (13;\ -14),\ (-14;\ 13),$$

$$(-15;\ 17),\ (17;\ -15),\ (-18;\ 19),\ (19;\ -18),$$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.